MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC

A. VI.

TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ÉS DIFFERENCIÁLÁSUK

ÍRTA:
DR. BAJCSAY PÁL

NEGYEDIK KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1973

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:

DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS
DR. MATH. SC.

★

BELSŐ MUNKATÁRSAK:

DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI TANÁR
A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK DOKTORA

DR. BAJCSAY PÁL
EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

★

SZEMLÉLTETÉS:

GYURCSY ENDRE
OKL. VILLAMOSMÉRNÖK

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1973

A

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SOROZAT KÖTETEI:

A.

A. I. Középiskolai matematika (Ötödik kiadás)
A. II. Egyváltozós elemi függvények (Harmadik kiadás)
A. III. Differenciálszámítás (Harmadik kiadás)
A. IV. Határozatlan integrál (Negyedik kiadás)
A. V.* Határozott integrál (Első rész) (Negyedik kiadás)
A. V.** Határozott integrál (Második rész) (Második kiadás)
A. VI. Többváltozós függvények és differenciálásuk (Negyedik kiadás)
A. VII. Többváltozós függvények integrálása (Második kiadás)
A. VIII. Taylor-sorok (Harmadik kiadás)
A. IX. Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek (Negyedik kiadás)
A. X.* A logarléc (Hatodik kiadás)

B.

B. I-II-III. Vektoranalízis. Térgörbék és felületek differenciálgeometriája. Skalár-, vektor- és tenzormezők (Harmadik kiadás)
B. IV. Komplex függvénytan (Harmadik kiadás)
B. V. Numerikus és grafikus közelítő módszerek (Második kiadás)
B. VI. Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok (Harmadik kiadás)
B. VII.* Közönséges differenciálegyenletek (Első rész) (Ötödik kiadás)
B. VII.** Közönséges differenciálegyenletek (Második rész) (Harmadik kiadás)
B. VIII. Parciális differenciálegyenletek (Második kiadás)

C.

C. I. Operátorszámítás. Speciális függvények (Második kiadás)
C. II. Variációszámítás (Harmadik kiadás)
C. III. Integrálegyenletek (Második kiadás)
C. IV. Mátrixszámítás (Negyedik kiadás)
C. V. Valószínűségszámítás (Második kiadás)
C. VI. Matematikai összefoglaló (Harmadik kiadás)
C. VII. Matematikai programozás (Második kiadás)

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk.)

A. VI.

TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ÉS DIFFERENCIÁLÁSUK

ÍRTA:

DR. BAJCSAY PÁL

KANDIDÁTUS
EGYETEMI DOCENS

Negyedik kiadás



EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

Készült a művelődésügyi miniszter rendeletére

E KÖTET KÉZIRATÁT ÁTNÉZTE:

DR. EGERVÁRY JENŐ †

KÉTSZERES KOSSUTH-DÍJAS,
AKADÉMIKUS, EGYETEMI TANÁR



A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy, a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter—Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben *dr. Alexits* akadémikus professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő műszaki, alkalmazott anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban, s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

Munkánk A. és *B.** része jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben, a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az

* A sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon!

igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása, szintén *újszerű szerkesztési elveket* kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkoztunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült e rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

Az *A. rész füzeteiben*, professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb műszaki problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

A *B.* és *C. rész füzeteiben* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva — nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból*, sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem — példatárnál amúgy is szegényes sikert ígérő — eredetiségre. Természetesen szépszámú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. villamosmérnök kolléga érdeme.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről*, mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink oktatóinak és hallgatóinak ajánljuk.* Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1.

A szerkesztő

A SOROZAT MÁSODIK ÉS HARMADIK KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve az eredeti terv szerint — sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 25 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *Minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak, 1958 nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai Kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása. A második kiadású kötetek jó részének gyors elfogyása — éppen a matematikai programozás lineáris algebrai segédeszközeivel, ill. a síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytani módszerével kapcsolatos bővítés után — kézzelfoghatóan bizonyítja a sorozat fejlesztésére, korszerűsítésére 1958-ban kitűzött célok és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítések helyességét.

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958 óta több újabb külországban (pl. a Szovjetunióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, USA-ban, Angliában, NSZK-ban) és nemzetközi fórumon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének nagy munkáját, ismét kérve ehhez a minisztérium, a kiadó és nem utolsósorban a műszaki olvasótáborunk buzdító, áldozatkész támogatását.

Budapest, 1964. febr. 15.

A szerkesztő

ELŐSZÓ A SOROZAT NEGYEDIK KIADÁSÁHOZ

A középiskolai és a műegyetemi tanterv újabban végbement jelentős változása, valamint az elektronikus számítástechnika széles előretörése folytán ez évben megindulhatott az előző kiadások során a hazai műszaki olvasótáborban közismertté és kedveltté vált könyvsorozatunk alaposabb felfrissítésének és korszerűbbítésének több éves periódusa. Ez számos kötetünk kisebb-nagyobb átdolgozásával, egyesek bővítésével, esetleg szűkítésével és néhány, eddig is szorgalmazott új kötet megjelenésével fog megvalósulni Karaink és a Kiadó örvendetes támogatásával. Sorozatunk immár közel 2 évtizedes eleven életútja, gazdag oktatási és kutatási tapasztalataink, az olvasók és az illetékesek ügypártolása kellemessé teszi számunkra ezt a nagy munkát.

Lectori salutem!

Budapest, 1971. május 15.

Dr. Fazekas Ferenc

ELŐSZÓ E KÖTETHEZ

A *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példatár jelen kötete a többváltozós függvények differenciálszámítását ismerteti, rövid, a többváltozós függvényeket bemutató, bevezető fejezet után. Fő célja az, hogy az önálló feladatmegoldás technikájának elsajátítását elősegítse. Az egyes fejezetek elején található rövid elméleti összefoglaló semmiképpen sem törekedhetik teljességre, csak emlékeztetőül szolgál a részletesen kidolgozott példák és a feladatok megértéséhez. Az összeválogatott fejezetek, példák és feladatok, egy-két részlettől eltekintve, alig haladják meg a műszaki egyetemeinken előadásra kerülő matematika programját. Ez magyarázza a kötet szűkebb terjedelmét. A legtöbb példa főként a fogalmak elmélyítését és az alkalmazásokhoz szükséges készség fejlesztését célozza.

Köszönettel tartozom elsősorban dr. *Egerváry Jenő* akadémikus professzornak, aki kéziratom átnézésével, bírálatával és számos, igen részletes megjegyzésével segítette munkámat.

Köszönetemet fejezem ki továbbá *Fazekas Ferenc* főszerkesztőnek, aki ugyancsak gondos átnézésével és apróbb megjegyzéseivel segített a kézirat rendezésében. Az ábrák gondos elkészítéséért *Bajza Lajos* és *Gyurcsy Endre* okl. villamosmérnököknek, valamint *Tóth Endre* demonstrátornak tartozom köszönettel.

Budapest, 1953. jan. 10.

Dr. Bajcsay Pál

ELŐSZÓ A KÖTET MÁSODIK, HARMADIK ÉS NEGYEDIK KIADÁSÁHOZ

A második, harmadik és negyedik kiadás az elsőtől csak néhány apróbb helyreigazításban különbözik.

Budapest, 1966. május 20., 1971. május 20.

Dr. Bajcsay Pál

E kötet

TARTALOMJEGYZÉKE

1. §. Többváltozós függvények fogalma 11

a) A többváltozós függvény; megadási módok 11

α) Definíció 11
β) Megadási módok 11

b) Többváltozós függvények szemléltetése 11

α) Kétváltozós függvények szemléltetése 11
β) Háromváltozós függvények szemléltetése 11
γ) Nomogramok 12
δ) Skalárterek 12
ε) Pontfüggvény fogalma 12

c) Értelmezési tartomány 12

d) Függvény határértéke, folytonossága 12

α) Határérték 12
β) Folytonosság 13

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

2. §. Parciális differenciálhányados 17

a) A parciális derivált fogalma 17
b) Magasabbrendű parciális deriváltak 17
c) Parciális derivált mint határérték 18
d) Helyi viszonylagos függvényérték-változás 18
e) Geometriai jelentés 18

PÉLDÁK ES FELADATOK

3. §. Többváltozós függvény differenciáljai. Középértéktétel. Differenciálhatóság 24

a) Parciális differenciál 24
b) A Lagrange-féle középértéktétel 24
c) Differenciálhatóság. Véges növekményekre vonatkozó közelítő egyenlőség. Teljes differenciál 25
d) Érintősík egyenlete 26
e) Függvényérték megváltozásának közelítő meghatározása 26

PÉLDÁK ES FELADATOK

4. §. Iránymenti differenciálhányados 32

a) Kétváltozós függvény iránymenti differenciálhányadosa 32
b) Háromváltozós függvény iránymenti differenciálhányadosa 32
c) Vektoros értelmezés 33

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

5. §. Összetett függvények, implicit függvények 35

a) Összetett függvények 35
b) Implicit függvények 35

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

6. §. Paraméteres függvények differenciálása 40

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

7. §. Magasabb rendű parciális deriváltak és differenciálok 44

a) Magasabbrendű parciális deriváltak 44
b) Magasabbrendű differenciálok 44

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

8. §. Felületi pontok osztályozása. Szélsőértékek 49

a) Felületi pontok osztályozása 49
b) Kétváltozós függvények szélsőértéke 49
c) Többváltozós függvények szélsőértéke 49
d) Feltételes szélsőértékek 50

PÉLDÁK

α) Szabad szélsőértékek 50
β) Feltételes szélsőértékek 57

FELADATOK

9. §. Függvényrendszerek, transzformációk (leképezések) 66

a) Függvényrendszerek 66

α) Leképzések 66
β) Görbevonalú koordináták 66

b) Jacobi-féle determináns 66
c) Összetett függvényrendszerek 67
d) Vektorterek 67

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

10. §. Síkgörbék szinguláris pontjai 70

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

11. §. Görbesereg burkolója 72

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

Eredménytár 74
Felhasznált és ajánlott irodalom 98

1. §. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK FOGALMA

a) A többváltozós függvény; megadási módok

α) *Definíció.* A függvényeket a független változók száma szerint egy- és többváltozós függvényekre osztjuk. A többváltozós függvények lehetnek két-, három-, négy-, . . . , n-változós függvények.

A többváltozós függvény a függő változó és a független változók közti olyan (bizonyos módon megadott) *összefüggés*, amely az utóbbiaknak minden (a függvény értelmezési tartományán belüli) értékrendszeréhez (értékpárjához, értékhármasához, értéknégyeséhez, . . . , érték-n-eséhez) meghatározott függő változó értékeket, ú. n. *függvényértékeket* rendel. A következő módon jelöljük:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ha a független változók minden egyes értékrendszeréhez (minden szám n-eshez) a függő változó egyetlen meghatározott értékét rendeljük hozzá, a függvényt *egyértékűnek* nevezzük. Ezzel szemben, ha a független változó bizonyos értékrendszereihez (szám-n-eseihez) több, különböző meghatározott függvényérték tartozik, akkor a függvény *többértékű*.

β) *Megadási módok.* A többváltozós függvényeknél szereplő függvénykapcsolatok konkrét megadási módjai megegyeznek az egyváltozós függvényeknél alkalmazottakkal. Így a többváltozós függvény is *megadható képlettel (analitikus megadási mód), értéktáblázattal, ábrával.* Az analitikus megadási mód — ugyanúgy, mint egyváltozós esetben — lehet *explicit, implicit* vagy *paraméteres.*

b) Többváltozós függvények szemléltetése

α) *Kétváltozós függvények szemléltetése.* Míg az egyváltozós függvények síkbeli koordinátarendszerben, síkgörbékkel, a kétváltozós függvények térbeli koordinátarendszerben, általában görbült *felületekkel* szemléltethetők. Az x és y független változók egy bizonyos — a függvény értelmezési tartományához tartozó — értékpárja, az (x, y) számpár által az (x, y) síkon kijelölt ponthoz hozzárendeljük a függvény által meghatározott z koordinátát: $z = f(x, y)$. E három összetartozó szám (koordináta) egy térbeli pontot, a függvényt szemléltető felület egy pontját határozza meg.

Ha a térbeli koordinátarendszerben a kétváltozós függvény által meghatározott felületet a független változók koordinátasíkjával párhuzamos (egyenlő távolságra lévő) síkokkal elmetsszük (e síkok egyenlete: $z = \text{const}$) és a nyert metszetgörbéket merőlegesen a független változók síkjára vetítjük, nyerjük a kétváltozós függvény *szintvonalas ábráját.* Ha e szintvonalak mindegyikét a megfelelő $z = \text{const}$ számmal ellátjuk, a függvényt szemléltető *szintvonalak kottázott görbeseregét* kapjuk. (Ez a szemléltetés megfelel annak, ahogyan egy egyváltozós függvényt kottázott skálával lehet ábrázolni.)

β) *Háromváltozós függvény szemléltetése.* Az $u = f(x, y, z)$ háromváltozós függvény térbeli koordinátarendszerben *szintfelületekkel* szemléltethető. Az u függő változónak különböző, állandó értékeket adva, az így előálló, összesen csak három változót

tartalmazó függvények egy-egy felületet határoznak meg, az ún. szintfelületeket. Ezek összessége adja a háromváltozós függvény térbeli képét.

γ) *Nomogrammok.* A többváltozós függvények nomogrammokkal is szemléltethetők. Ezek a nomogrammok *vonalseregesek* vagy *pontsorosak.* Vonalsereges nomogrammnál a változók számával megegyező számú metsződő görbesereg szemlélteti a függvényt. E görbeseregek egyes görbéit a változók egyes értékeivel kottázzuk. Az összetartozó értékekkel kottázott görbék egy pontban metsződnek.

Pontsoros nomogrammnál a változók számával megegyező számú kottázott pontsor (skála; általában görbevonalú skála) szemlélteti a függvényt. Az összetartozó értékekkel kottázott pontok pl. egy egyenesen feküsznek.

δ) *Skalárterek.* Ha a független változókat egy *n-méretű vektor* koordinátáinak tekintjük, akkor a többváltozós függvény *skalár-vektor-függvényt (skalárteret)* jelent. (L. a *Vektoranalízis* c. kötetet!)

ε) *Pontfüggvény fogalma.* Az n-változós függvény pontfüggvénynek is tekinthető, ha az n független változót az *n-méretű tér egy pontja* koordinátáinak tekintjük $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. A függő változó, a függvény által meghatározott módon függ az n-méretű tér pontjaitól.

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(X).$$

A függvény az n-méretű tér bizonyos pontjaihoz függvényértékeket rendel hozzá.

c) Értelmezési tartomány

Azon pontok összessége (halmaza), melyekhez a függvény függvényértékeket rendel hozzá (melyekben a függvénynek van értelme), alkotják a függvény értelmezési tartományát. Ha semmi kiegészítő feltételünk nincs — egy képlettel megadott függvény esetében — akkor a függvény értelmezési tartománya megegyezik a függvény képletében szereplő analitikus kifejezések közös (és valós, határozott helyettesítési értékekre vezető) értelmezési tartományával.

Az értelmezési tartomány lehet *zárt* vagy *nyílt,* aszerint, hogy a tartomány határpontjai a tartományhoz tartoznak-e vagy sem.

d) Függvény határértéke, folytonossága

α) *Határérték.* Az n-változós

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(X)$$

függvénynek az $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pontban *van határértéke,* és ez b, jelekben

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b,$$

vagy röviden

$$\lim_{X \to A} f(X) = b,$$

ha akármilyen megadott $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b| < \varepsilon,$$

hacsak

$$0 < \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < \delta.$$

β) Folytonosság. Az n-változós

$$v = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

függvényt az $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pontban *folytonosnak* mondjuk, ha e pontban van *határértéke* és az *megegyezik a függvény helyettesítési értékével*, azaz

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Az n-változós függvényt *a független változók (argumentumok) egy része szerint folytonosnak* nevezzük, ha a függvény, mint ezeknek az argumentumoknak a függvénye, folytonos a többi argumentumnak minden adott (megengedett) értékrendszere esetén.

Példák

1. Készítsük el a $z = x^2 + y^2$ kétváltozós függvény értéktáblázatát.

$y \backslash x$	−2	−1	0	1	2	3
−2	8	5	4	5	8	13
−1	5	2	1	2	5	10
0	4	1	0	1	4	9
1	5	2	1	2	5	10
2	8	5	4	5	8	13
3	13	10	9	10	13	18

2. Határozzuk meg a $z = x^2 + y^2$ függvénynek a koordinátasíkokkal párhuzamos síkmetszeteit (szintvonalait). Rajzoljuk meg a szintvonalak ábráit. A szintvonalas ábrák alapján állapítsuk meg, milyen felülettel szemléltethető a függvény, és készítsünk a felületről axonometrikus ábrát!

a) Az (x, y) síkkal párhuzamos síkmetszetek egyenletei a függvény képletéből úgy adódnak, ha z helyébe constans számértékeket helyettesítünk. A függvény képletéből rögtön látható, hogy csak $z \geqq 0$ lehetséges.

$z = 0$ esetén $x = y = 0$,

$z = 1$ esetén $x^2 + y^2 = 1$,

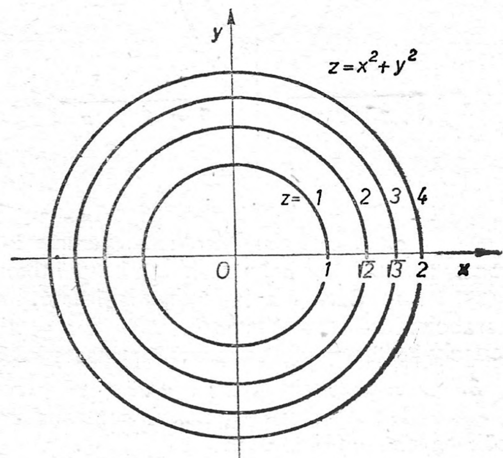
$z = 2$ esetén $x^2 + y^2 = 2$,

. . . .

$z = c$ esetén $x^2 + y^2 = c$, ahol $c > 0$.

Ezek az egyenletek $\sqrt{c}$ sugarú köröket határoznak meg (1. ábra).

Az (x, y) síkkal párhuzamos síkmetszetek koncentrikus körök. Eb-



1. ábra

ből rögtön az következtethető, hogy olyan forgásfelülettel van dolgunk, melynek tengelye a z tengely.

b) Az (x, z) síkkal párhuzamos síkmetszetek úgy adódnak, ha y helyébe constans számértékeket helyettesítünk:

$$y = 0 \quad \text{esetén} \quad z = x^2,$$

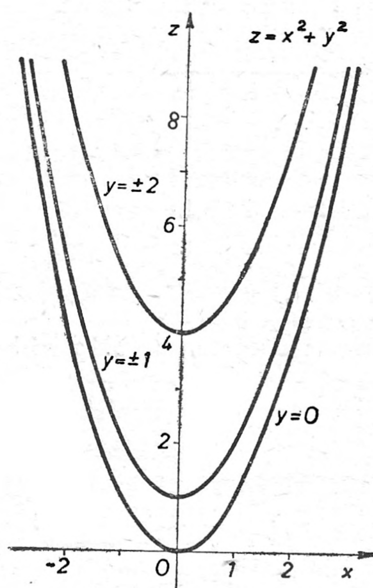
$$y = \pm 1 \quad \text{esetén} \quad z = x^2 + 1,$$

$$y = \pm 2 \quad \text{esetén} \quad z = x^2 + 4,$$

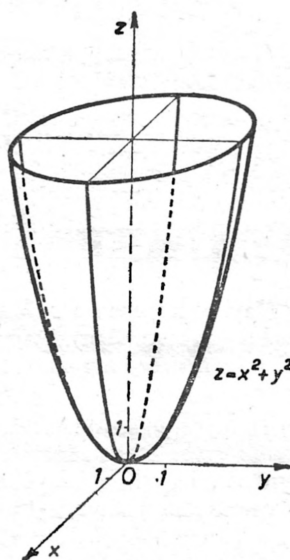
....

$$y = \pm c \quad \text{esetén} \quad z = x^2 + c^2.$$

Ezek az egyenletek kongruens másodfokú parabolákat jellemeznek, melyek egymástól egy z tengely irányában való $+ c^2$ mértékű eltolásban különböznek (2. ábra).



2. *ábra*



3. *ábra*

c) A függvény explicit egyenlete x-ben, y-ban szimmetrikus, tehát x helyébe constans értékeket helyettesítve a *b)* pontban találthoz hasonló eredményt kapunk.

d) Ezek alapján megállapítható, hogy a $z = x^2 + y^2$ függvény egy forgási paraboloiddal szemléltethető, mely a $z = x^2$ (vagy $z = y^2$) másodfokú parabolának z tengely körüli megforgatásával származtatható (3. ábra).

3. Szemléltessük az $u = x^2 + y^2 + z^2$ háromváltozós függvényt!

Ha u helyébe (pozitív) constans értékeket helyettesítünk, koncentrikus gömbök egyenleteit kapjuk:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c, \quad c > 0.$$

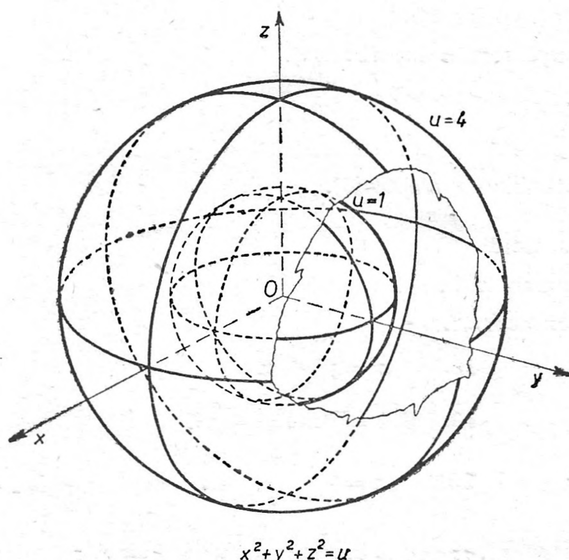
E gömbök közös középpontja az origó, sugaruk $\sqrt{c}$. A függvény szintfelületes térbeli képe a 4. ábrán látható.

4. Határozzuk meg a $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ függvény értelmezési tartományát! z-nek csak valós értékeket engedünk meg, tehát a gyök alatti mennyiség nem lehet negatív:

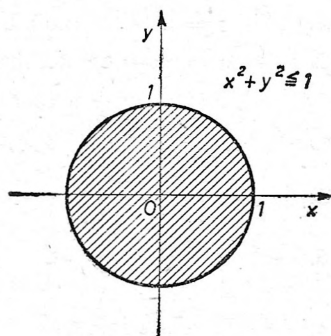
$$1 - x^2 - y^2 \geqq 0,$$

vagyis

$$x^2 + y^2 \leqq 1.$$



4. ábra



5. ábra

Ennek alapján megállapítható, hogy az adott függvény csak oly (x, y) értékpárra van értelmezve, melyhez tartozó pont az (x, y) síkban az origótól 1-nél nem fekszik nagyobb távolságra. Az értelmezési tartomány az (x, y) síkban az origó köré rajzolt egységsugarú kör belseje és kerülete (5. ábra).

Az értelmezési tartomány zárt, mert a határgörbe pontjai is hozzá tartoznak a tartományhoz.

Feladatok

a) Készítsünk értéktáblázatot a következő kétváltozós függvényekhez:

1. $z = x^2 - y^2$.
2. $z = xy$.
3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. $z = \sin xy$.
5. $z = x - y^2$.

b) Szemléltessük az alábbi függvényeket szintvonalas ábrákkal. Állapítsuk meg, hogy e függvények milyen felületeket határoznak meg, és ábrázoljuk e felületeket axonometrikusan.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (gömb).
2. $x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 1$ (ellipszoid).

3. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ (forgási ellipszoid).

4. $2x^2 + 4y^2 - z^2 = 1$ (egyköpenyű hiperboloid).

5. $6x^2 + 6y^2 - 3z^2 = 1$ (egyköpenyű forgási hiperboloid).

6. $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 1$ (kétköpenyű hiperboloid).

7. $2x^2 - y^2 - z^2 = 1$ (kétköpenyű forgási hiperboloid).

8. $z^2 = 2x^2 + 3y^2$ (kúp).

9. $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ (forgáskúp).

10. $z = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ (hiperbolikus paraboloid).

11. $z = xy$ (hiperbolikus paraboloid).

12. $z = x^2 + 2y^2$ (elliptikus paraboloid).

13. $z = -x^2 + y$ (parabolikus henger).

14. $z = \cos(x + \sqrt{3}\,y)$.

15. $z = \dfrac{3x + 2y}{x + 2y}$.

16. $z = \sin^2 x - y^2$.

17. $z = xy^2$.

18. $z = y^2 + x$.

19. $z = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$.

20. $z = \dfrac{1}{y - x + 1}$.

21. $z = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^4 - 4xy + 1$.

c) Szemléltessük szintfelületekkel az alábbi háromváltozós függvényeket:

1. $u = x^2 + y^2 - z$.

2. $u = \dfrac{xy}{z}$.

3. $u = z - \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. $u = x^2 - y + z$.

5. $u = z - \cos\sqrt{x^2 + y^2}$.

d) Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát (független változók: x és y!):

1. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

2. $x^2 = y^2 + z^2$.

3. $z = \dfrac{1}{xy}$.

4. $z = \ln(x - 2y)$.

5. $z = \sqrt{x - y^2}$.

6. $x^2 + 2y^2 - \sin z = 0$.

2. §. PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLHÁNYADOS

a) A parciális derivált fogalma

Az n-változós

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(X)$$

függvényt az $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ helyen (az $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pontban), x_i szerint differenciálhatónak mondjuk, ha az egyváltozós

$$y = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

függvény az $x_i = a_i$ helyen differenciálható; ennek differenciálhányadosát az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ helyen vett x_i szerinti *parciális differenciálhányadosának* vagy *parciális deriváltjának* nevezzük.

Vagyis a többváltozós függvényt valamelyik változó szerint úgy kell differenciálnunk, hogy a többi változót állandónak tekintve, azt mint egyváltozós függvényt differenciáljuk.

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ szerinti parciális differenciálhányadosokat rendre *így jelöljük*:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

vagy

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n},$$

vagy

$$f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

vagy

$$y'_{x_1}, y'_{x_2}, \ldots, y'_{x_n}.$$

b) Magasabbrendű parciális deriváltak

E differenciálhányadosokat az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény *elsőrendű* (vagy *első) parciális differenciálhányadosainak* mondjuk. Ezeket a fenti értelemben parciálisan újra differenciálva, a függvény *másodrendű* (vagy *második) parciális differenciálhányadosaihoz* jutunk *és így tovább.* Az x_i szerinti első parciális differenciálhányadost x_k szerint újra differenciálva a nyert második parciális differenciálhányados jele

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = f''_{x_i x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y''_{x_i x_k}.$$

Ha $i = k$, vagyis ha x_i szerint kétszer egymás után differenciálunk, akkor e differenciálhányados jele

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = f''_{x_i^2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y''_{x_i^2}.$$

Hasonlóan jelöljük a magasabbrendű parciális differenciálhányadosokat (l. 7. §, 42. old.).

c) Parciális derivált mint határérték

A mondottak értelmében pl. valamely kétváltozós függvény:

$$z = f(x, y),$$

(a, b) helyen vett x, illetve y szerinti parciális deriváltja mint határérték:

$$f'_x(a, b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x},$$

$$f'_y(a, b) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y}.$$

d) Helyi viszonylagos függvényérték-változás

Az $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ többváltozós függvény $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ helyen vett x_i szerinti parciális deriváltja *a függvény helyi (lokális) viszonylagos (relatív) értékváltozását* méri az x_i változó által kijelölt irányban. A pozitív előjel növekedést, a negatív előjel csökkenést jelent (az x_i-nek választott pozitív előrehaladási irányában menve).

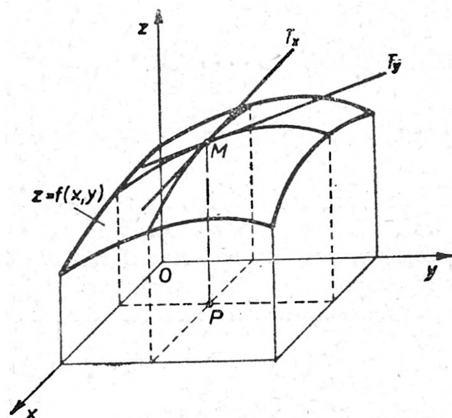
A kétváltozós $z = f(x, y)$ függvénynél:

1. $f'_x(a, b)$ méri a függvény (a, b) helyi x iránymenti viszonylagos értékváltozását;

2. $f'_y(a, b)$ méri a függvény (a, b) helyi y iránymenti viszonylagos értékváltozását.

e) Geometriai jelentés

A kétváltozós függvény parciális deriváltjainak geometriai jelentése nyilvánvaló (6. ábra).



6. ábra

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ az (x, z) síkkal párhuzamos síknak a $z = f(x, y)$ felülettel való metszésvonalán fekvő $M(x, y, z)$ pontban a metszésvonalhoz húzott T_x *érintőnek az iránytangense*;

2. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ az (y, z) síkkal párhuzamos síknak a $z = f(x, y)$ felülettel való metszésvonalán fekvő $M(x, y, z)$ pontban a metszésvonalhoz húzott T_y *érintőnek az iránytangense.*

Példák

1. Számítsuk ki a $z = x^y$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\,x^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x.$$

2. Határozzuk meg a $z = 3\,axy - x^3 - y^3$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait az $x = a, y = a$ helyen!

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\,ay - 3\,x^2; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3\,ax - 3\,y^2.$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=a\\y=a}} = 3\,a^2 - 3\,a^2 = 0; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=a\\y=a}} = 3\,a^2 - 3\,a^2 = 0.$$

3. A $P(x, y)$ pont távolsága az origótól: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Határozzuk meg e kétváltozós függvény parciális deriváltjait és adjuk meg ezeknek geometriai értelmezését (7. ábra)!

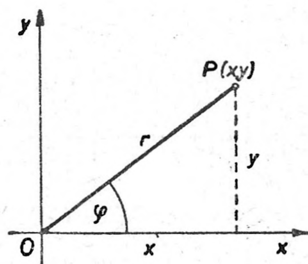
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\varphi;$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Fennáll tehát a következő azonosság:

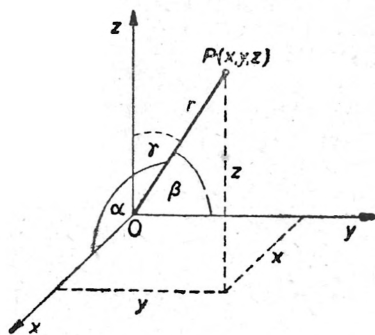
$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

A parciális deriváltak az r *rádiuszvektor iránycosinusai.*



7. ábra

4. A $P(x, y, z)$ pont távolsága az origótól: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Határozzuk meg a háromváltozós függvény parciális deriváltjait, és állapítsuk meg ezeknek geometriai értelmét (8. ábra)!



8. ábra

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} = \cos\alpha;$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r} = \cos\beta;$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r} = \cos\gamma.$$

A parciális deriváltak jelentik a pont rádiusz-vektorának a koordinátatengelyekkel bezárt α, β, γ szögek cosinusait. Ezek a *rádiuszvektor iránycosinusai.*

Mivel

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=1,$$

azért fennáll:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

azaz

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2=1.$$

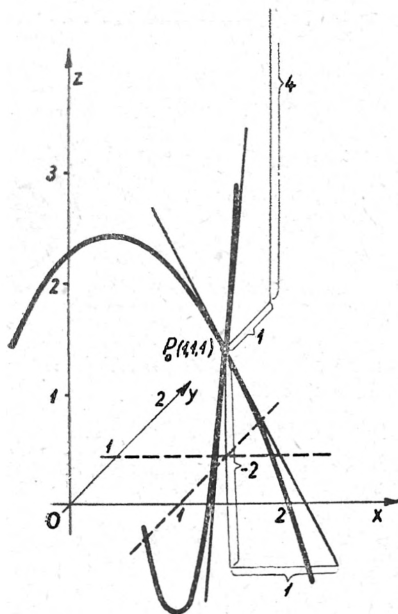
5. Határozzuk meg a $z = 2x^2 - y^2$ felület $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ helyhez tartozó pontjában az (x, z), illetve (y, z) koordinátasíkokkal párhuzamos metszetgörbék érintőinek iránytangensét.

Az adott pont koordinátái: $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$.

A keresett érintő-iránytangensek a függvény x, illetve y szerinti parciális deriváltjaival egyenlők, az adott helyen.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y.$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=4; \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=-2.$$



9. ábra

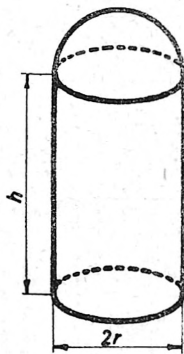
Eredményünket térbeli koordinátarendszerben, axonometrikus ábrázolásban szemléltetni is tudjuk (9. ábra).

A T_x érintő az (x, z) síkkal, a T_y érintő az (y, z) síkkal párhuzamos.

6. Egy egyenes körhenger sugara r, magassága h. Tetején áll egy ugyancsak r sugarú félgömb (10. ábra). A test alapját változatlanul hagyva, állapítsuk meg a térfogat viszonylagos értékváltozását, a magassághoz viszonyítva (ha a magasság „igen kevéssel" változik).

A test térfogata:

$$V=r^2\pi h+\frac{2}{3}r^3\pi.$$



10. ábra

Ha csak a magasság (h) változik, a viszonylagos függvényérték-változás nem más, mint V-nek h szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{\partial V}{\partial h}=r^2\pi.$$

Tehát a térfogat $r^2\pi$-szer „gyorsabban" változik, mint a magasság.

7. Mi a helyzet akkor, ha csak a sugár (r) változik „igen kevéssel"?

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2r\pi h + 2r^2\pi = 2r\pi(r+h).$$

Tehát a térfogat $2r\pi(r+h)$-szor „gyorsabban" változik, mint a sugár.

A két utóbbi példa végeredményét összehasonlítva, megállapíthatjuk, hogy a V térfogat megváltoztatásának hatékonyabb módja az r sugár megváltoztatása, mint a h magasság megváltoztatása.

Feladatok

a) Határozzuk meg az alábbi függvényeknek a független változók szerinti *elsőrendű parciális deriváltjait.*

1. $z = x^2 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$
2. $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$
3. $z = 2x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - 8y^2 - 7xy + 6x.$
4. $z = (ax^2 + bxy + cy^2)^3.$
5. $z = \ln x^y.$
6. $z = y\cos x + x\cos y.$
7. $z = xe^y + ye^x.$
8. $z = \sin^2 x + \sin x \cdot \cos y + \cos^2 y.$
9. $z = \sin x \cdot \ln y + \ln x \cdot \cos y.$
10. $u = xy\sin z + xz\ln y + e^x y.$
11. $z = 2xy - ye^{\sqrt{3-x}}.$
12. $z = 2e^{x^2y} + 3a^{xy^2} + 2x^3y^2.$
13. $z = x^2y^3 + x^2\sin xy + y\ln x.$
14. $u = xy + xz + yz.$
15. $z = e^{xy}.$
16. $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$
17. $z = xy - \frac{3}{x} + \frac{5}{y}.$
18. $u = (xy)^z.$
19. $u = z^{xy}.$
20. $z = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}.$

b) Határozzuk meg az alábbi felületek adott (x_0, y_0) helyhez tartozó pontjában az (x, z) illetve (y, z) koordinátasíkokkal párhuzamos *metszetgörbék érintőinek iránytangensét.*

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 4;\ x_0 = 0{,}5,\ y_0 = 1.$
2. $z = \sqrt{4x^2 + 8y^2};\ x_0 = 1,\ y_0 = 2.$
3. $z = \cos(x + \sqrt{3}y);\quad x_0 = \frac{\pi}{4},\ y_0 = 0.$
4. $z = \sin^2 x - y^2;\quad x_0 = \frac{\pi}{3},\ y_0 = 1.$
5. $z = x^2y;\ x_0 = 1,\ y_0 = 2.$

c) Az alábbiakban felsorolunk néhány geometriai, illetve fizikai összefüggést. Ezekben az összefüggésekben válasszuk az egyik változó mennyiséget függő változónak, a többit független változónak, majd határozzuk meg az egyes független változókhoz viszonyított *lokális* (illetve pillanatnyi) *relatív függvényértékváltozást.*

α) Geometriai összefüggések

1. A *háromszög* két oldala a és b, a közbezárt szög γ. Ekkor a *területe*:

$$T = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

2. Az *általános négyszög* átlói: d_1 és d_2; az átlók által bezárt szög: φ. A négyszög *területe*:

$$T = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

3. A körgyűrű sugarai: R és r $(R > r)$. A *körgyűrű területe*:

$$T = \pi(R^2 - r^2).$$

4. A parabola húrjának hossza: s; a húrnak a vele párhuzamos érintőtől való távolsága: h. A *parabolaszelet területe*:

$$T = \frac{2}{3} s \cdot h.$$

5. Az egyenes körkúp alapkörének sugara: r, magassága: h. A *kúp palástjának felszíne* :

$$F = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$

6. Az ellipszoid féltengelyei: a, b, c. Az *ellipszoid térfogata* :

$$V = \frac{1}{3} \pi abc.$$

β) Fizikai összefüggések

1. A gáz nyomása: p, térfogata: v, abszolút hőmérséklete: T. A gázállandó: $R =$ $=$ const. *Clapeyron egyenlete* szerint:

$$pv = RT.$$

2. Ha P a vonóerő (kg), v a sebesség (m/sec), akkor a *vontatás teljesítménye*:

$$N = \frac{Pv}{75} \text{ (LE)}.$$

3. Ha a fordulatszám n (perc^{-1}), a kerék sugara r (m), akkor a *kerületi sebesség*:

$$v = \frac{2\pi}{60} rn \text{ (m/mp)}.$$

4. N a teljesítmény (LE), n a fordulatszám (perc^{-1}), akkor a *forgatónyomaték* :

$$M = 716 \frac{N}{n} \text{ (mkg)}.$$

5. A hasznos teljesítmény: N_h, a bevezetett teljesítmény: $N_ö$. *A gép hatásfoka:*

$$\eta = \frac{N_h}{N_ö}.$$

6. A gyorsító erő ütemes változása következtében a gép munkasebessége egy legnagyobb v_1 és egy legkisebb v_2 érték között ingadozik, vagyis a gép járása egyenlőtlen. A sebesség középértéke: $v_k = \frac{v_1 + v_2}{2}$. *A gép egyenlőtlenségi foka:*

$$\delta = \frac{v_1 - v_2}{v_k}.$$

7. *Adiabatikus állapotváltozásnál* a nyomás (p) és a térfogat (v) összefüggése

$$pv^{\varkappa} = \text{const.}$$

A kitevőben szereplő állandó levegőre (és kétatomú gázokra): $\varkappa = 1{,}4$.

8. *Ohm törvénye* szerint az i egyenáram (amp), u egyenfeszültség (volt) és r ellenállás (ohm) között a következő az összefüggés:

$$u = ir.$$

9. Az r (Ω) ellenálláson átfolyó i (amp) áramerősség *fűtőteljesítménye egyenáram esetén*:

$$W = i^2 r \quad \text{(watt)}.$$

10. A ϱ fajlagos ellenállású, l hosszúságú, q keresztmetszetű *vezető ellenállása*:

$$r = \varrho \frac{l}{q}.$$

11. Ha az l (cm) közepes hosszúságú, n-menetű toroid tekercsen i (amp) áramerősség folyik át, akkor a keletkezett *mágneses térerősség*:

$$H = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{ni}{l} \quad \text{(oersted)}.$$

12. Az *egyenáramú motor* mágnestekercs-rendszerének ellenállása: r_m; a szabályozó ellenállás: R_m. A kapocsfeszültség: U. Ekkor a *gerjesztő áram erőssége*:

$$i_m = \frac{U}{r_m + R_m}.$$

13. A *váltakozó áram* effektív (hatásos) értéke: i; a feszültség effektív (hatásos) értéke u; a fázisszög: φ. A *teljesítmény*:

$$w = u \cdot i \cdot \cos\varphi \quad \text{(watt)}.$$

14. A *transzformátor* vastestének súlya: G (kg); a vastest lemezeinek anyagára jellemző, a súlyegységre vonatkoztatott veszteségi tényező: $v_{10} = \text{const}$ (watt/kg); az indukció: B (gauss). A *vasveszteség*:

$$V_{vas} = G\, v_{10} \left(\frac{B}{10\,000} \right)^2 \quad \text{(watt)}.$$

3. §. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY DIFFERENCIÁLJAI. KÖZÉPÉRTÉKTÉTEL. DIFFERENCIÁLHATÓSÁG

a) Parciális differenciál

Ha az

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

függvénynek létezik x_i szerinti parciális deriváltja, akkor e független változó szerinti parciális differenciálját úgy értelmezhetjük, mint a

$$\Delta_{x_i} y = f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

parciális növekménynek a Δx_i növekménnyel arányos főrészét.

A parciális differenciál eszerint:

$$\boxed{d_{x_i} y = \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i .}$$

A több független változós függvénynek bármely változó szerinti parciális differenciálja egyenlő a megfelelő parciális differenciálhányadosnak és ezen változó differenciáljának a szorzatával.

Pl. a kétváltozós $z = f(x, y)$ függvénynél:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx,$$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy .$$

(A parciális differenciál értelmezése alapján, a parciális differenciálhányadost is a fenti módon értelmezett differenciálok hányadosának tekinthetjük:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d_x z}{dx} ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d_y z}{dy} .$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$ és $\frac{\partial z}{\partial y}$ azonban semmiképen sem tekinthető ∂z, ∂x és ∂y törtjeinek.)

b) A Lagrange-féle középértéktétel

Ha az

$$y = f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

függvény az $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pont valamely környezetében mindegyik argumentuma szerint (véges vagy végtelen) parciális differenciálhányadossal

rendelkezik, akkor tetszőleges, az A pont környezetében fekvő X ponthoz létezik legalább egy olyan n pontból álló $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pontrendszer, hogy fennáll az

$$f(X) - f(A) = f'_{x_1}(X_1)\,(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(X_2)\,(x_2 - a_2) + \ldots + f'_{x_n}(X_n)\,(x_n - a_n)$$

egyenlőség és mindegyik $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pontnak kisebb a távolsága az A ponttól az X és A pontok távolságánál.

E tétel következményei:

1. Ha az $f(X)$ függvénynek mindegyik argumentuma szerint korlátos differenciálhányadosai vannak valamely tartományban, akkor e függvény e tartományban folytonos.
2. Ha az $f(X)$ függvénynek valamely tartományában mindegyik argumentuma szerinti differenciálhányadosa nullával egyenlő, akkor ott $f(X)$ állandó.
3. Ha az $f(X)$ függvénynek valamely tartományában az argumentumok egy része szerint nullával egyenlők a differenciálhányadosai, akkor e függvény a tartomány minden pontjának elegendő kicsiny környezetében a megfelelő argumentumokra nézve állandó.

c) Differenciálhatóság. Véges növekményekre vonatkozó közelítő egyenlőség. Teljes differenciál

Az

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

függvény valamely $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pontban *differenciálható*, ha a függvény növekménye így írható:

$$\Delta y = f(X) - f(A) = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$$
$$= f'_{x_1}(A)\,(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(A)\,(x_2 - a_2) + \ldots + f'_{x_n}(A)\,(x_n - a_n) + \varepsilon_1(x_1 - a_1) +$$
$$+ \varepsilon_2(x_2 - a_2) + \ldots + \varepsilon_n(x_n - a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n + \varepsilon_1 \Delta x_1 + \varepsilon_2 \Delta x_2 + \ldots + \varepsilon_n \Delta x_n,$$

ahol

$$\varepsilon_1 \to 0,\ \varepsilon_2 \to 0, \ldots, \varepsilon_n \to 0,$$

ha

$$X \to A, \text{ azaz } (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) \to (0, 0, \ldots, 0).$$

Ha

$$\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2} = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} \approx 0,$$

azaz, ha az $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pont „elegendő kicsiny környezetére" szorítkozunk, akkor

$$\Delta y \approx f'_{x_1}(A)\,(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(A)\,(x_2 - a_2) + \ldots + f'_{x_n}(A)\,(x_n - a_n) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n.$$

Ez a *véges növekményekre vonatkozó egyenlőség* (röviden: *véges növekmények tétele*) lényegében nem más, mint a Lagrange-féle középértéktétel közelítő egyenlőség alakjában.

A

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

kifejezés a Δy növekménynek ú. n. főrésze.

$$\varepsilon_1\,\Delta x_1+\varepsilon_2\,\Delta x_2+\ldots+\varepsilon_n\,\Delta x_n$$

pedig az elenyésző rész.

A $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_n$ véges növekmények helyett $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ differenciákat írva nyerjük a függvény ú. n. *teljes* (vagy *totális*) *differenciálját* :

$$dy=df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n=d_{x_1}f+d_{x_2}f+\ldots+d_{x_n}f.$$

A többváltozós függvény teljes differenciálja a függvény parciális differenciálhányadosai és a megfelelő független változók differenciáljai szorzatának összegével egyenlő. Vagy röviden: a teljes differenciál a többváltozós függvény parciális differenciáljainak összegével egyenlő.

Megjegyzendő, hogy ha a többváltozós függvény az összes változói szerint *folytonos* parciális differenciálhányadosokkal rendelkezik, akkor létezik a teljes differenciálja.

***d)* Érintősík egyenlete**

A kétváltozós $z=f(x,y)$ függvény esetében, a véges növekményekre vonatkozó közelítő egyenlőség geometriailag azt fejezi ki, hogy a $z=f(x,y)$ függvény által meghatározott felületet az (x_0, y_0) helyhez tartozó pontja környezetében érintősíkjával helyettesítjük:

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)\,(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)\,(y-y_0).$$

Ennek alapján a $z=f(x,y)$ felületnek az (x_0, y_0) helyhez tartozó pontjában az érintősíkját a következő egyenlet határozza meg:

$$z=z_0+f_x'(x_0,y_0)\,(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)\,(y-y_0),\quad (z_0=f(x_0,y_0)).$$

***e)* Függvényérték megváltozásának közelítő meghatározása**

A véges növekményekre vonatkozó

$$\Delta y\approx\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

közelítő egyenlőség alapján a független változók értékeinek „kicsiny" megváltozásaihoz tartozó függvényérték megváltozása jó közelítéssel meghatározható.

Példák

1. Határozzuk meg a

$$z=\sin(x^2+y^2)$$

függvény teljes differenciálját.

Mivel

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cdot\cos(x^2+y^2)$$

és

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cdot \cos(x^2 + y^2)$$

azért a keresett teljes differenciál:

$$dz = 2(x\,dx + y\,dy) \cdot \cos(x^2 + y^2).$$

2. Határozzuk meg a

$$z = x^2 + 2y^2$$

felület érintősíkjának egyenletét az $x_0 = 2, y_0 = 1$ helyhez tartozó pontban.

Az adott pont koordinátái:

$$x_0 = 2,$$

$$y_0 = 1,$$

$$z_0 = 6.$$

A függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y;$$

az adott helyen:

$$f'_x(2, 1) = 4; \quad f'_y(2, 1) = 4.$$

Így az érintősík egyenlete:

$$z - 6 = 4(x - 2) + 4(y - 1),$$

vagy rendezve:

$$4x + 4y - z = 6.$$

3. Az optikai lencse tárgy-, kép- és fókusztávolsága közt fennálló

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

összefüggésből

$$k = \frac{ft}{t - f}.$$

Legyen $f = 30$ cm, $t = 35$ cm. Ekkor $k = \dfrac{30 \cdot 35}{35 - 30} = 210$ cm. Tegyük fel, hogy f, t adatai nem pontosak. Ezen adatok hibái legyenek: $\Delta f = \pm\, 0{,}15$, $\Delta t = \pm\, 0{,}2$. Kérdés, hogy milyen határok közt ingadozik a képlettel számított k értéke, ha f és t ingadozásai a megadottak?

k változását a véges növekményekre vonatkozó közelítő egyenlőséggel így fejezhetjük ki:

$$\Delta k \approx \frac{\partial k}{\partial f}\Delta f + \frac{\partial k}{\partial t}\Delta t.$$

A mi esetünkben:

$$\frac{\partial k}{\partial f} = \frac{t(t-f)+ft}{(t-f)^2} = \left(\frac{t}{t-f}\right)^2; \quad \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{f(t-f)-ft}{(t-f)^2} = -\left(\frac{f}{t-f}\right)^2.$$

Az adott értékekkel:

$$\left(\frac{\partial k}{\partial f}\right)_{\substack{f=30\\t=35}} = 49\,; \quad \left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)_{\substack{f=30\\t=35}} = -36.$$

Tehát

$$\Delta k = 49 \cdot \Delta f - 36 \cdot \Delta t.$$

(Ebből a közelítő egyenlőségből sok minden olvasható ki. Pl. látszik, hogy f-nek növekedése, t-nek viszont csökkenése okozza k-nak növekedését. Látszik, hogy f és t változásai nem egyenlő mértékben befolyásolják k értékét. Kiszámítható továbbá az is, hogy bizonyos Δf megváltozást mekkora Δt megváltozás képes kiegyensúlyozni: $\Delta k = 0$ kell, hogy legyen! E megállapítások persze csak megközelítőleg igazak! Éspedig annál jobb közelítéssel, minél kisebb $|\Delta f|$ és $|\Delta t|$.)

A mi feladatunk Δk felső korlátjának megállapítása a $\Delta f = \pm 0{,}15$, $\Delta t = \pm 0{,}2$ ingadozások esetére.

Mivel

$$|\Delta k| \leqq \left|\frac{\partial k}{\partial f}\right| |\Delta f| + \left|\frac{\partial k}{\partial t}\right| |\Delta t|,$$

azért

$$|\Delta k| \leqq 49 \cdot 0{,}15 + 36 \cdot 0{,}2 = 7{,}35 + 7{,}2 = 14{,}55 < 15.$$

Tehát k pontos értéke a következő két korlát közé esik:

$$210 - 15 < k < 210 + 15,$$

azaz

$$195 < k < 225.$$

4. Legyen egy kéttényezős szorzat: $z = xy$.

Határozzuk meg a szorzat relatív hibájának felső korlátját, ha a tényezők relatív hibái: $\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ és $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$ ismertek.

Mivel

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

és a véges növekményekre vonatkozó közelítő egyenlőség alapján:

$$|\Delta z| \leqq |y|\,|\Delta x| + |x|\,|\Delta y|,$$

azért a keresett relatív hiba korlátja:

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \leqq \frac{|y|\,|\Delta x| + |x|\,|\Delta y|}{|xy|} = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|.$$

Tehát a szorzat relatív hibájának korlátja egyenlő a tényezők relatív hibáinak összegével.

5. Határozzuk meg a $z = \frac{x}{y}$ hányados relatív hibájának felső korlátját, ha az osztandó és osztó relatív hibája ismert: $\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ és $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$.

Mivel

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

és a véges növekményekre vonatkozó közelítő egyenlőség alapján:

$$|\Delta z| \leqq \left|\frac{1}{y}\right| |\Delta x| + \left|\frac{x}{y^2}\right| |\Delta y|,$$

azért a keresett relatív hiba korlátja:

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \leqq \frac{\left|\frac{1}{y}\right| |\Delta x| + \left|\frac{x}{y^2}\right| |\Delta y|}{\left|\frac{x}{y}\right|} = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|.$$

Tehát a hányados relatív hibájának korlátja egyenlő az osztandó és osztó relatív hibájának összegével.

Feladatok

a) Határozzuk meg az alábbi függvények *teljes differenciálját*.

1. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.
2. $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$.
3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. $u = \ln (x + y + z)$.
5. $z = x^y$.
6. $z = e^{x^2 y}$.
7. $z = x^2 y - 2xy - y^2 - x$.
8. $z = \sin (x + y) + \cos (x - y)$.
9. $z = y \sin x + \cos (x - y)$.
10. $u = e^{xyz}$.
11. $z = \sqrt{x^2 + y^2} + \sin x \cdot \sin y$.
12. $z = x^3 - 3x^2 y + y^3$.
13. $u = \frac{x^2 y}{4 - z^2}$.
14. $u = x^2 y - xz^2 + z^2 y - xyz$.
15. $u = \frac{1}{\sqrt{x - 1}} + yz$.
16. $u = \operatorname{arctg} \frac{2x + y - x^2 y}{1 - 2xy - x^2}$.
17. $z = a^x b^y + \sin xy$.
18. $z = \arccos \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}}$.
19. $u = \arccos \frac{z}{xy}$.
20. $z = \operatorname{arctg} xy + x \cdot \sin y + x^y$.

b) Határozzuk meg az alábbi felületek *érintősík*jának egyenletét az adott (x_0, y_0) helyhez tartozó pontban.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

2. $z = \sqrt{x^2 - 2y^2}$; $x_0 = 3$, $y_0 = 2$.

3. $z = \cos(x - 2y)$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = \frac{\pi}{4}$.

4. $z = \sin^2 x - y^2$; $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $y_0 = 2$.

5. $z = xy$; $x_0 = 2$, $y_0 = 6$.

c) Az alábbi példákban alkalmazzuk a *véges növekményekre vonatkozó közelítő egyenlőséget.*

1. Az *ingaóra* járását ingája szabályozza, melyet fizikai ingának kell felfognunk. A fizikai inga lengésideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{Mgs}}.$$

Tegyük fel, hogy pontatlan elkészítés miatt K $2^0/_{00}$-kel, M pedig $5^0/_{00}$-kel kisebb a kelleténél. Milyen pontatlanságot okoz ez az inga járásában?

2. *Egy pont mozog* az

$$x^2 - 2y^2 - 2z = 0$$

felületen. Adott időpontban a (2, 1, 1) pontban van. Mennyivel változik z, ha x 0,01-dal y pedig $-$ 0,02-dal változik?

3. Egy test *fajsúlyát* kísérlettel úgy határozzuk meg, hogy megmérjük a test súlyát a levegőben és vízbe mártva. Legyen a test súlya levegőben: $Q_1 = 8$ kg; vízbe mártva: $Q_2 = 7$ kg. A fajsúly:

$$f = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} = 8 \text{ kg/dm}^3.$$

Kérdés, hogy mekkora a számított fajsúly legnagyobb hibája, ha Q_1 hibája $\pm \frac{1}{100}$ kg, Q_2 hibája $\pm \frac{1}{200}$ kg?

4. Egy *áramkörben* $V = 110$ volt hatására $I = 15$ amp áramerősség folyik. *Ohm törvénye* alapján a vezetőkör ellenállása:

$$R = \frac{V}{I}.$$

Feltételezve, hogy a feszültségmérő leolvasásánál elkövetett hiba $\frac{1}{20}$ volt, az ampermérő leolvasásánál pedig $\frac{1}{10}$ amper, mekkora a számított ellenállás hibája?

5. Tegyük fel, hogy $\sin(x + y)$ kiszámítására a

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

képletet használjuk. A két szög sinusát méréssel határozzuk meg:

$$\sin x = \frac{3}{5}, \quad \sin y = \frac{5}{13}.$$

Mekkora az eredmény közelítő hibája, ha a mérésnél elkövetett hiba, mindkét esetben 0,1?

6. Egy *lejtőn lefelé guruló test gyorsulását* a

$$\gamma = g \sin \alpha$$

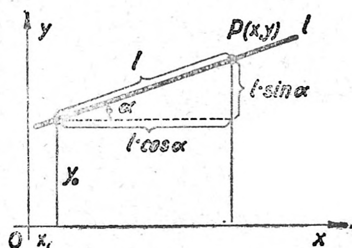
képlettel számítjuk. Legyen $\alpha = 30^\circ$, $g = 9{,}8$. Kérdés, hogy mekkora az eredmény közelítő hibája, ha $\Delta g = 0{,}03$ és $\Delta\alpha = 0{,}01$?
(Fokot átszámítani radiánba!)

7. Egy *egyenes körkúp* alapkörének sugara: $r = 4$ cm, magassága: $m = 6$ cm. Mekkora a térfogat és a felszín számítási hibája, ha a sugár és a magasság mérési hibája 1%?

4. §. IRÁNYMENTI DIFFERENCIÁLHÁNYADOS

a) **Kétváltozós függvény iránymenti differenciálhányadosa**

A kétváltozós $z = f(x, y)$ függvény változását vizsgáljuk egy az (x, y) síkban fekvő (x_0, y_0) pontból kiinduló és az x tengely pozitív szárával α szöget bezáró l félegyenes mentén (11. ábra). Jelöljük e félegyenes (x, y) pontjának az (x_0, y_0) ponttól mért távolságát l-lel. Akkor



11. ábra

$$x - x_0 = l \cdot \cos\alpha,$$

$$y - y_0 = l \cdot \sin\alpha,$$

és így

$$f(x, y) = f(x_0 + l\cos\alpha, y_0 + l\sin\alpha) = \varphi(l).$$

A függvény l iránymenti deriváltján a

$$\lim_{l \to 0} \frac{\varphi(l) - \varphi(0)}{l} =$$

$$= \lim_{l \to 0} \frac{f(x_0 + l\cos\alpha, y_0 + l\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{l}$$

határértéket értjük.

Jele: $f'_l(x_0, y_0)$ vagy $\left(\frac{dz}{dl}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$.

A paraméteres függvény differenciálási szabálya alapján az iránymenti deriváltra a következő képletet nyerjük:

$$\frac{dz}{dl} = f'_l(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha.$$

b) **Háromváltozós függvény iránymenti differenciálhányadosa**

A háromváltozós

$$u = f(x, y, z)$$

iránycosinusokkal meghatározott s irányban vett iránymenti deriváltja hasonlóan:

$$\frac{du}{ds} = f'_s(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

(Az iránycosinusok az s irányba mutató egységvektor koordinátái, melyekre tehát fennáll:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.)$$

c) Vektoros értelmezés

Ha a választott l vagy s irány a kétváltozós függvény szintvonala érintőjének irányával vagy a háromváltozós függvény szintfelülete érintősíkjával párhuzamos, akkor az iránymenti differenciálhányados értéke 0. A szintvonalra, illetve szintfelületre merőleges irányban viszont a legnagyobb abszolút értékű az iránymenti differenciálhányados, amint az könnyen igazolható.

Az iránymenti derivált a függvény értékváltozási sebességét méri a választott irányban (a lokális relatív függvényérték-változást, a választott irányban való elmozdulás egységére vonatkoztatva). Tehát a függvény értékváltozási sebessége a szintvonalakra, illetve szintfelületekre merőleges irányban a legnagyobb.

Ha az n-változós függvény független változóit az n-méretű tér helyvektorai koordinátáinak, azaz a többváltozós függvényt skalártérnek (skalár vektor-függvénynek) tekintjük; akkor az egyes változók szerint vett parciális deriváltak az ún. *gradiens-vektor* koordinátái.

Pl. a háromváltozós

$$u = f(x, y, z)$$

függvény esetében

$$\mathbf{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}.$$

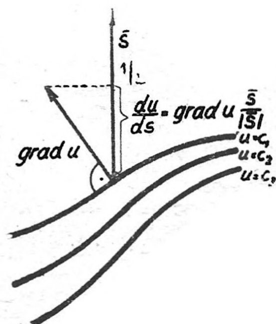
Ezzel az $\mathbf{s}$ vektor által kijelölt irányban vett derivált egyszerűen skaláris szorzattal fejezhető ki (12. ábra). Ugyanis az $\mathbf{s}$ irányba mutató egységvektor:

$$\frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} = \cos\alpha \cdot \mathbf{i} + \cos\beta \cdot \mathbf{j} + \cos\gamma \cdot \mathbf{k},$$

és így

$$\frac{du}{ds} = \mathbf{grad}\, u \cdot \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

(Ezekről bővebbet lásd a *Vektoranalízis* című kötetben.)



12. ábra

Példák

1. Határozzuk meg a

$$z = 2xy - x^2 + y^2$$

függvénynek az $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ helyen, az $\alpha = 30°$-os irányban vett iránymenti deriváltját.

Mivel

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y - 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y;$$

az adott helyen

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} = 2, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} = 6,$$

azért az iránymenti derivált

$$\left(\frac{dz}{dl}\right)_{x_0, y_0} = 2 \cdot \cos 30° + 6 \cdot \sin 30° = 1{,}73 + 3 = 4{,}73.$$

2. Határozzuk meg az

$$u = xyz$$

függvénynek az $x_0 = 1, y_0 = -2, z_0 = 1$ helyen az $s\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ irányban vett iránymenti deriváltját.

Mivel

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy;$$

az adott helyen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = -2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 = -2,$$

azért az iránymenti derivált

$$\left(\frac{du}{ds}\right)_0 = -2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} - 2\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi függvények adott iránymenti deriváltját.

1. $z = x^3 + y^3 - 3xy$; $x_0 = 1, y_0 = 1$; $\alpha = 15°$.
2. $z = 2x^3 - 3x^2y + 3y^3$; $x_0 = 2, y_0 = -1$; $\alpha = 20°$.
3. $u = xy + xz + yz$; $x_0 = -1, y_0 = 3, z_0 = -2$; $s\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
4. $z = x^y$; $x_0 = 2, y_0 = 3$; $\alpha = 45°$.
5. $z = xy - \frac{3}{xy}$; $x_0 = 4, y_0 = -2$; $\alpha = 60°$.
6. $u = z^{xy}$; $x_0 = 2, y_0 = 1, z_0 = 3$; $s\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
7. $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; $x_0 = 2, \quad y_0 = 2, \quad \alpha = 30°$.
8. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x_0 = 3, y_0 = 4$; $\alpha = 25°$.
9. $z = \sin(x^2 + y^2)$; $x_0 = 1, y_0 = 1$; $\alpha = 45°$.
10. $u = \sin xyz$; $x_0 = \pi, y_0 = \frac{1}{2}, z_0 = \frac{1}{2}$; $s\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

5. §. ÖSSZETETT FÜGGVÉNYEK. IMPLICIT FÜGGVÉNYEK

a) Összetett függvények

Legyen a $z = f(u, v)$ függvényben $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$. Ekkor $z = F(x, y)$ összetett függvény. Ez esetben

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

és

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Mivel

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy,$$

továbbá

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = du$$

és

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = dv,$$

azért a tagok megfelelő átcsoportosításával beláthatóan:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

b) Implicit függvények

Tegyük fel, hogy az $F(x, y) = 0$ egyenlet az y-t mint az x független változó egyértékű függvényét értelmezi: $y = f(x)$. Ha itt y helyébe az $f(x)$ függvényt tesszük, akkor az

$$F(x, f(x)) \equiv 0$$

azonosságot kapjuk.

Az összetett függvény differenciálási szabálya alapján, a

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

egyenletből:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.}$$

Ez a képlet az egy független változós implicit függvény deriváltjára vonatkozó általános képlet.

Ha az $F(x, y, z) = 0$ implicit függvényben az x és y változók a független változók, akkor

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

és

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Példák

1. Számítsuk ki a

$$z = \frac{1}{x}\sqrt{1 - x^2 - y^2} \cdot \ln \sin (x - y)$$

függvény parciális deriváltjait.

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$u = \frac{1}{x}, \quad v = 1 - x^2 - y^2, \quad w = \sin (x - y).$$

Ezekkel

$$z = u\sqrt{v} \ln w.$$

Mivel

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{v} \cdot \ln w\,; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{v}} \ln w\,; \quad \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{u\sqrt{v}}{w}\,;$$

továbbá:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0\,;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y\,;$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \cos (x - y), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\cos (x - y)\,;$$

valamint:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

és

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y},$$

azért

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}\sqrt{1-x^2-y^2}\ln\sin(x-y)-\frac{\ln\sin(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x}\operatorname{ctg}(x-y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y\ln\sin(x-y)}{x\sqrt{1-x^2-y^2}}-\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x}\operatorname{ctg}(x-y).$$

2. Határozzuk meg az

$$F(x,y)\equiv(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$$

egyenlettel megadott lemniszkáta érintőjének iránytangensét.

Mivel

$$\frac{\partial F}{\partial x}=4x(x^2+y^2)-4a^2x$$

és

$$\frac{\partial F}{\partial y}=4y(x^2+y^2)+4a^2y,$$

azért

$$y'=-\frac{4x(x^2+y^2)-4a^2x}{4y(x^2+y^2)+4a^2y}=\frac{x}{y}\cdot\frac{a^2-x^2-y^2}{a^2+x^2+y^2}.$$

3. Számítsuk ki az $F(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-R^2=0$ egyenlet által implicite adott z függvénynek parciális deriváltjait.

Mivel

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\quad\frac{\partial F}{\partial y}=2y,\quad\frac{\partial F}{\partial z}=2z,$$

azért

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$$

4. Számítsuk ki az $F(x,y,z)\equiv e^{-xy}+e^z-2z=0$ egyenlet által implicite adott z függvénynek parciális deriváltjait.

Mivel

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-ye^{-xy},\quad\frac{\partial F}{\partial y}=-xe^{-xy},\quad\frac{\partial F}{\partial z}=e^z-2,$$

azért

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ye^{-xy}}{e^z-2},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xe^{-xy}}{e^z-2}.$$

5. Ha az x, y, z változók az $f(x, y, z) = 0$ összefüggés által vannak egymással összekapcsolva úgy, hogy (a változók mindegyikére igaz az implicit függvény exisztencia tétele, azaz) bármelyik változó a másik kettőnek egyértékű függvénye, akkor

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Ugyanis:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_x}; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{f'_z}{f'_y}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z}.$$

E tétel alkalmazása a termodinamikában nagy jelentőségű. Pl. *Clapeyron* egyenlete szerint $pv - RT = 0$. S erre

$$\frac{\partial p}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1.$$

Feladatok

a) Az alábbi függvényekben az u függő változó a v, w változók közvetítésével az x, y, illetve z független változók függvénye. Határozzuk meg a függvény elsőrendű parciális deriváltjait.

1. $u = v^2 - 2\,v\,e^w$; $\quad \begin{cases} v = x^2y - 2\,x\,y, \\ w = \sin(x + y). \end{cases}$

2. $u = \ln\sqrt{v^2 + w^2}$; $\quad \begin{cases} v = \dfrac{1}{\sqrt{x - y^2}}, \\ w = e^{xyz} \end{cases}$

3. $u = \dfrac{v\,w}{v + w}$; $\quad \begin{cases} v = \operatorname{arctg} xy, \\ w = x \sin y. \end{cases}$

4. $u = \dfrac{v^2 + w^2}{v - w}$; $\quad \begin{cases} v = \sin xyz, \\ w = ax^2 + by^2 + cz^2. \end{cases}$

5. $u = e^{v^2 w}$; $\quad \begin{cases} v = \ln(x + y - z), \\ w = x^y. \end{cases}$

b) Határozzuk meg az alábbi *egyváltozós implicit függvények y' deriváltját*

1. $9x^2 + 4y^2 = 36.$
2. $x^3 - x^2y + xy^2 + y^3 = 0.$
3. $3x^2 + 2y^2 - 4x - 4 = 0.$
4. $x^3 + y^3 - 3axy = 0.$
5. $y^2 - \dfrac{x + y}{x - y} = 0.$
6. $y^2(x-2) - (x + 2)^3 = 0.$
7. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}.$
8. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$
9. $2\sin^2 x + 3\sin^2 y = 0.$
10. $y \sin x - x \cos y = 0.$
11. $\cos(x + y) - xy = 0.$
12. $2x + 3y + 4e^{xy} = 0.$

13. $e^x \cos x - \cos y = 0.$

14. $x \operatorname{ctg} y + y \sin x = 0.$

15. $ye^x + 2xy^3 = 0.$

16. $x^2 - \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0.$

17. $e^y + x^{x+y} = 0.$

18. $a^{xy} + x \sin y = 0.$

19. $xe^y - y + 1 = 0.$

20. $x \ln y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$

21. $\operatorname{tg}(x^2 + y^2) + e^{x^2} + y^2 = 0.$

22. $x^y - y^x = 0.$

23. $\frac{y}{x} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = 0.$

24. $a^{x-y} - x^y = 0.$

c) Számítsuk ki az alábbi *kétváltozós implicit függvényeknél* a $\frac{\partial z}{\partial x}$ és $\frac{\partial z}{\partial y}$ *parciális deriváltakat.*

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$

2. $x^3 + y^3 + z^3 - 3z = 0.$

3. $x \cos y + y \cos z + z \cos x = a.$

4. $xy + xz + yz = 1.$

5. $x^2 + 2y^2 + \cos z = 4.$

6. §. PARAMÉTERES FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLÁSA

Tegyük fel, hogy az

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = f(u, v)$$

paraméteres függvényendszer az x, y, z változók egyikét, pl. z-t, mint a másik két változó egyértékű függvényét definiálja. Számítsuk ki z'_x és z'_y parciális deriváltakat.

A $z = f(u, v)$ egyenletből:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

és

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Az $x = \varphi(u, v)$ és $y = \psi(u, v)$ függvényeket x szerint deriválva:

$$1 = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

E két egyenlőségből:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial v}}{\dfrac{\partial x}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u}}$$

és

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial x}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u}}.$$

Az $x = \varphi(u, v)$ és $y = \psi(u, v)$ függvényeket y szerint deriválva:

$$0 = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$1 = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

E két egyenlőségből:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}}$$

és

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}}.$$

Ezekkel végül:

$$z'_x = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}},$$

$$z'_y = \frac{\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}}.$$

Példa

Az

$$x = R\sin u\cdot\cos v\;;\quad y = R\sin u\cdot\sin v\;;\quad z = R\cos u$$

paraméteres függvényrendszer az origó körül R sugárral leírt gömböt határozza meg. Határozzuk meg a gömb érintősíkjának egyenletét az u_0, v_0 paraméterértékekkel meghatározott x_0, y_0, z_0 koordinátájú pontban (13. ábra).

Az előbbi végeredményben szereplő parciális deriváltak:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = R\cos u\cos v\;;$$

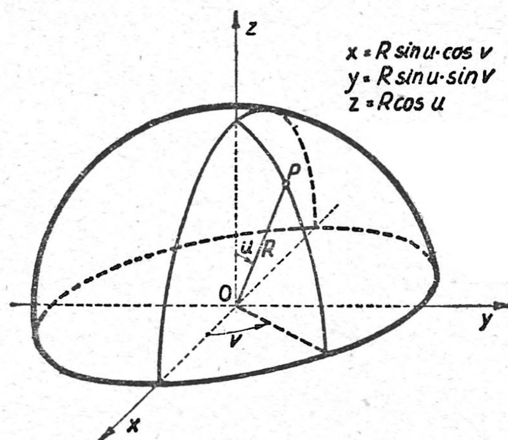
$$\frac{\partial x}{\partial v} = -R\sin u\sin v\;;$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = R\cos u\sin v\;;$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = R\sin u\cos v\;;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -R\sin u\;;$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$



13. ábra

Az adott u_0, v_0 paraméterértékek behelyettesítésével az előbbi végeredmény szerint:

$$z'_x = \frac{-R^2 \sin^2 u_0 \cos v_0}{R^2 \sin u_0 \cos u_0 \cos^2 v_0 + R^2 \sin u_0 \cos u_0 \sin^2 v_0} = -\frac{\sin u_0 \cos v_0}{\cos u_0};$$

$$z'_y = \frac{-R^2 \sin^2 u_0 \sin v_0}{R^2 \sin u_0 \cos u_0 \cos^2 v_0 + R^2 \sin u_0 \cos u_0 \sin^2 v_0} = -\frac{\sin u_0 \sin v_0}{\cos u_0}.$$

Ezekkel az érintősík egyenlete:

$$z - z_0 = -\frac{\sin u_0 \cos v_0}{\cos u_0}(x - x_0) - \frac{\sin u_0 \sin v_0}{\cos u_0}(y - y_0),$$

vagy rendezve:

$$\sin u_0 \cos v_0 (x - x_0) + \sin u_0 \sin v_0 (y - y_0) + \cos u_0 (z - z_0) = 0.$$

Mivel ebben az egyenletben x, y, z együtthatói éppen az adott pont rádiuszvektorának megfelelő iránycosinusaival egyenlők, azért az analitikus geometriából ismert tételnek megfelelően a gömb érintősíkja merőleges a gömbnek az érintési ponthoz húzott sugarára.

Feladatok

Az alábbi feladatokban, kétparaméteres egyenletrendszerrel megadott felületeknek határozzuk meg az érintősíkját.

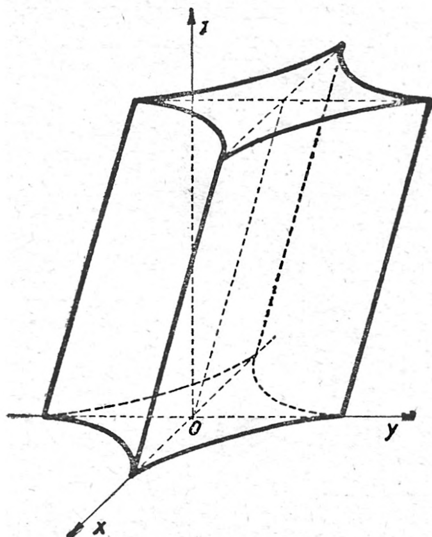
1. (x, y) síkban fekvő, asztroid vezérgörbéjű, ferde hengerfelület:

$$x = 4\cos^3 u + 3v,$$

$$y = 4\sin^3 u + 2v,$$

$$z = 4v,$$

$$u_0 = \frac{\pi}{3}, \quad v_0 = 1. \quad \text{(14. ábra.)}$$



14. ábra

2. (x, y) síkban fekvő, kardioid vezérgörbéjű, ferde kúp:

$$x = 4(v + 1) - 3(2\cos u - \cos 2u)\, v,$$

$$y = 5(v + 1) - 3(2\sin u - \sin 2u)\, v,$$

$$z = 5(v + 1);$$

$$u_0 = \frac{\pi}{3}, \quad v_0 = 2. \quad \text{(15. ábra.)}$$

3. Gyűrűfelület (tórusz);

$$x = (5 + 2\cos u)\cos v,$$

$$y = (5 + 2\cos u)\sin v,$$

$$z = 2\sin u\ ;$$

$$u_0 = \frac{\pi}{4},\quad v_0 = \frac{\pi}{6}.\quad \text{(16. ábra.)}$$

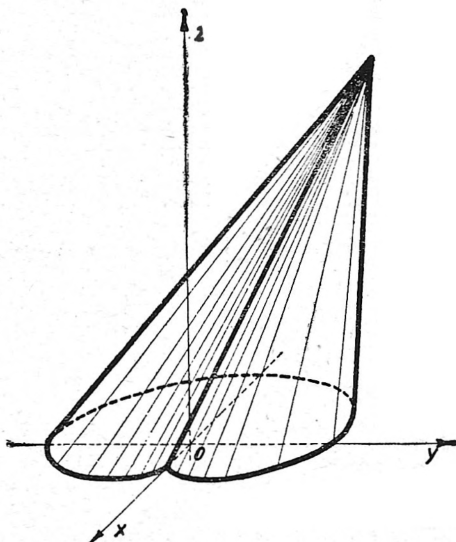
4. Asztroid meridiángörbéjű forgásfelület:

$$x = 5\cos^3 u \cdot \cos v,$$

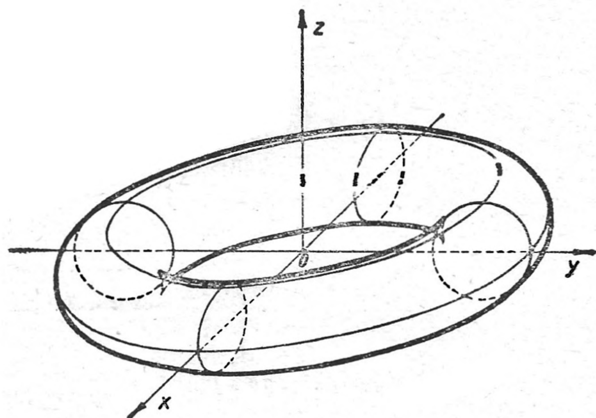
$$y = 5\cos^3 u \cdot \sin v,$$

$$z = 5\sin^3 u\ ;$$

$$u_0 = \frac{\pi}{6},\quad v_0 = \frac{\pi}{3}.\quad \text{(17. ábra.)}$$



15. ábra



16. ábra

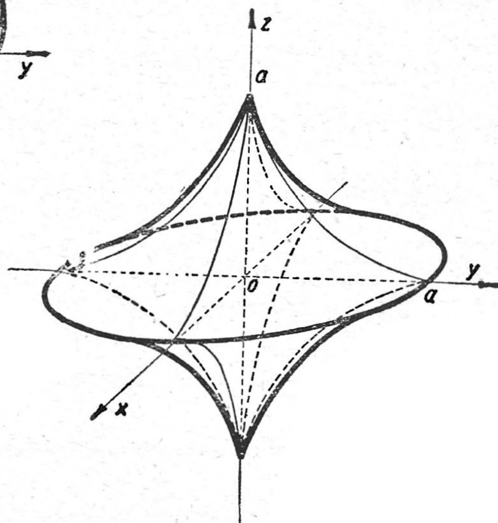
5. Parabolikus hengerfelület:

$$x = u + 2v,$$

$$y = -v,$$

$$z = u^2 + 3v\ ;$$

$$u_0 = 2,\ v_0 = -1.$$



17. ábra

7. §. MAGASABBRENDŰ PARCIÁLIS DERIVÁLTAK ÉS DIFFERENCIÁLOK

a) Magassabbrendű parciális deriváltak

Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ többváltozós függvény elsőrendű parciális deriváltjainak további parciális deriváltjai adják a függvény másod-, harmad-, ..., n-edrendű parciális deriváltjait.

Az adott függvényt az x_i változó szerint n-szer parciálisan differenciálva kapjuk a függvény ú. n. n-edik tiszta parciális deriváltját:

$$f_{x^n}^{(n)} = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}.$$

Ha a magasabbrendű parciális derivált képzésénél különböző változók szerint differenciálunk parciálisan, pl. a kétváltozós függvénynél x szerint k-szor és y szerint $(n-k)$-szor, nyerjük a függvény következő n-edik parciális deriváltját:

$$f_{x^k y^{n-k}}^{(n)} = \frac{\partial^n f}{\partial x^k \, \partial y^{n-k}},$$

vagy

$$f_{y^{n-k} x^k}^{(n)} = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \, \partial x^k}.$$

A többváltozós függvény n-edrendű vegyes parciális deriváltjai egymással megegyeznek, függetlenül a differenciálás sorrendjétől, feltéve, hogy e parciális deriváltak folytonosak:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k \, \partial y^{n-k}} = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \, \partial x^k}. \quad \textit{[Schwarz (Young) tétele.]}$$

b) Magasabbrendű differenciálok

A kétváltozós függvény n-edik differenciálja:

$$d^n z = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + C_n^1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \, \partial y} dx^{n-1} dy + C_n^2 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \, \partial y^2} dx^{n-2} dy^2 + \ldots$$

$$\ldots + C_n^{n-1} \frac{\partial^n z}{\partial x \, \partial y^{n-1}} dx \, dy^{n-1} + \frac{\partial^n z}{\partial y^n} dy^n = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z.$$

Az itt szereplő $C_n^1, C_n^2, \ldots$ együtthatók a binomiális együtthatók. Az utolsó képlet szimbolikusan jelöli az előtte állót. A hatványozást formálisan elvégezve és z-vel beszorozva ugyanaz adódik.

Példák

1. Legyen $z = 2x^2 + 3x^2y - 2y^2$. Számítsuk ki a második parciális deriváltakat!

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 6xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 4y\ ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4 + 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4.$$

Mint látható, valóban:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 6\,x.$$

2. Legyen $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$. Mutassuk ki, hogy e függvény *„harmonikus függvény"*, azaz kielégíti a síkbeli *Laplace-féle differenciálegyenletet*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Mivel

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

azért

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

és

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Ezekkel pedig, valóban

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

3. Bizonyítandó, hogy

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = 0,$$

ha

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Fejtsük ki előbb a differenciálegyenlet baloldalát:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u =$$

$$= x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 2xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} + 2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}.$$

Kiszámítjuk az itt szereplő parciális deriváltakat:

Mivel

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

azért

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{-xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=\frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=\frac{-yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Ezeket behelyettesítve:

$$\frac{x^2y^2+x^2z^2+x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+y^2z^2-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=0 \quad \text{q. e. d.}$$

4. Állapítsuk meg, hogy milyen összefüggés áll fenn z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ és $\frac{\partial z}{\partial y}$ között, ha $z=e^y\arcsin(x-y)$.

Mivel

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^y}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$$

és

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^y\arcsin(x-y)-\frac{e^y}{\sqrt{1-(x-y)^2}},$$

azért

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

5. Határozzuk meg a $z=x^3+y^3-3xy$ függvény harmadik teljes differenciálját.

Az általános képlet alapján:

$$d^3z=\left[\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right]^3 z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}dx^2\,dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Kiszámítjuk a parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=6,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=0,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=6.$$

Ezekkel

$$d^3z=6dx^3+6dy^3.$$

Feladatok

a) 1. $$z = e^x \cos y - e^y \sin x.$$

Mutassuk ki, hogy

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}.$$

2. $$z = \sin x \cdot \ln y + \ln x \cdot \cos y.$$

Mutassuk ki, hogy

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x}.$$

3. $$z = x^y$$

Mutassuk ki, hogy

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}.$$

4. $$z = x^3y^2 - 3xy^4 + 4x^2y^3.$$

Mivel egyenlő

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}?$$

5. $$z = e^{xy} + ye^x + xe^y.$$

Számítsuk ki a második teljes differenciált!

6. $$z = y^2 - 2ye^x + 2x \ln y.$$

Keressük meg a harmadik teljes differenciált!

7. $$z = 2\,x^3 - 5\,x^2y + 3\,xy^2 - 8\,y^2 - 7\,xy + 6\,x.$$

Számítsuk ki a

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\quad \text{és}\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$$

deriváltakat.

b) Az alábbi feladatokban a matematikai fizika néhány parciális differenciálegyenletét mutatjuk be, a megoldással együtt. A megoldásban szereplő határozatlan függvények az argumentum tetszés szerinti, differenciálható függvényei lehetnek.

Igazoljuk behelyettesítéssel, hogy a közölt megoldások valóban kielégítik a differenciálegyenleteket!

1. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,;\quad u = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

2. $$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,;\quad u = \frac{xy}{x+y}.$$

3. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u = f(x + at) + g(x - at).$$

4. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 u; \quad u = \frac{A\, e^{-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + B\, e^{a\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

5. $$\frac{\partial^2 \ln z}{\partial x\, \partial y} = 2z; \quad z = \frac{\varphi'(x) \cdot \psi'(y)}{[\varphi(x) + \psi(y)]^2}.$$

6. $$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u = f[x + \varphi(y)].$$

7. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad u = x \cdot \varphi(x + y) + y \cdot \psi(x + y).$$

8. §. FELÜLETI PONTOK OSZTÁLYOZÁSA. SZÉLSŐÉRTÉKEK

a) Felületi pontok osztályozása

A $z = f(x, y)$ kétváltozós függvénnyel megadott *felületnek* (x, y) helyhez tartozó *pontja* — feltételezve, hogy a függvény (folytonos) másodrendű parciális differenciálhányadosokkal rendelkezik:

hiperbolikus, ha $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} < 0,$

parabolikus, ha $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} = 0,$

elliptikus, ha $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} > 0.$

Ez utóbbi esetben a felület *alulról nézve domború*, ha $f''_{xx} > 0$ és $f''_{yy} > 0$; *alulról nézve homorú*, ha $f''_{xx} < 0$ és $f''_{yy} < 0$.

b) Kétváltozós függvények szélső értéke

Az $f(x, y)$ kétváltozós függvénynek valamely (x, y) helyhez tartozó pontjában *szélsőértéke van*, ha ott a felület érintősíkja párhuzamos az (x, y) síkkal és a felületi pont elliptikus. Tehát ha valamely (x, y) helyen

$$f'_x = 0 \quad \text{és} \quad f'_y = 0,$$

továbbá

$$f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} < 0,$$

akkor ott a függvénynek szélsőértéke van; mégpedig, amennyiben $f''_{xx} > 0$ és $f''_{yy} > 0$, akkor *minimum*; ha $f''_{xx} < 0$ és $f''_{yy} < 0$, akkor *maximum*.

c) Többváltozós függvények szélsőértéke

Ahhoz, hogy az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ többváltozós függvénynek az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ helyen szélsőértéke legyen, szükséges és elégséges, hogy

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ legyen;

2. a következő (ún. *Hesse-féle determinánsban*:

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix},$$

ahol

$$p_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_k},$$

az összes párosrendű sarokaldeterminánsok pozitívak, és a páratlanrendű sarokaldeterminánsok előjele egyenlő a p_{11} előjelével. Ha ilyen körülmények között $p_{11} > 0$, akkor a függvénynek *minimuma* van, ha pedig $p_{11} < 0$, akkor a függvénynek *maximuma* van.

Az egymásután következő első-, másod-, harmad-, . . . , $(n-1)$-ed-, n-edrendű sarokaldeterminánsok a következők:

$$p_{11}; \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}; \ldots; \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1\,n-1} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{n-1\,1} & p_{n-1\,2} & \cdots & p_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}.$$

d) Feltételes szélsőértékek

Feltételes szélsőérték számításánál az

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

függvény szélsőértékeit úgy kell meghatároznunk, hogy a függvény változói közben eleget tegyenek a

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\,; \quad \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\,; \ldots; \varphi_k\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

egyenletekkel meghatározott mellékfeltételeknek. Itt $f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ függvények az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ változók változásának egész tartományában első és második parciális differenciálhányadosokkal rendelkeznek.

A feladat megoldására alkalmas a *Lagrange-féle multiplikátorok módszere.* E szerint a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ határozatlan állandók bevezetésével a kötött (feltételes) szélsőértékfeladatot az

$$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_k\,\varphi_k$$

újonnan bevezetett függvény szabad szélsőérték feladatára vezetjük vissza.

Példák

α) *Szabad szélsőértékek*

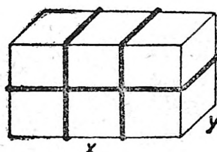
1. Egy 4,5 dm³ térfogatú, téglatest alakú csomagot az ábrán (18. ábra) látható módon kötünk át zsineggel. Milyennek válasszuk a csomag méreteit, hogy a lehető legkevesebb zsineg legyen szükséges az átkötéséhez?

A térfogat

$$T = 4{,}5 = xym,$$

ahonnan

$$m = \frac{4{,}5}{xy}.$$



18. ábra

A zsineg hossza

$$H = 2x + 6y + 4 \cdot \frac{4{,}5}{xy} = 2x + 6y + \frac{18}{xy}.$$

Ennek a függvénynek keressük a szélsőértékeit.

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 2 - \frac{18}{x^2 y} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 6 - \frac{18}{x y^2} = 0.$$

Szorozzuk meg az első egyenletet $(-3x^2y^2)$-tel, a másodikat x^2y^2-tel:

$$-6x^2y^2 + 54y = 0,$$

$$6x^2y^2 - 18x = 0.$$

A kettő összege:

$$54y - 18x = 0,$$

ahonnan

$$x = 3y.$$

Ezt behelyettesítjük az első egyenletbe:

$$2 \cdot 3^2 y^2 \cdot y - 18 = 0,$$

azaz

$$y^3 = 1.$$

Tehát szélsőérték csak az $x = 3$, $y = 1$ helyen lehet.
A második parciális deriváltak:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{36}{x^3 y}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{36}{x y^3}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x\, \partial y} = \frac{18}{x^2 y^2}.$$

A kiszámított (3, 1) helyen:

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_{(3,1)} = \frac{4}{3}; \quad \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)_{(3,1)} = 12\,; \quad \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x\, \partial y}\right)_{(3,1)} = 2.$$

Így

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = \frac{4}{3} \cdot 12 - 2^2 = 12 > 0.$$

Tehát van szélsőérték és mivel $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} > 0$ és $\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} > 0$, azért minimum.
A csomag szükséges méretei tehát:

$$x = 3 \text{ dm},$$

$$y = 1 \text{ dm},$$

$$m = 1{,}5 \text{ dm}.$$

2. Határozzuk meg a

$$z = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 1$$

egyenlettel megadott elliptikus paraboloid szélsőértékét!

z-nek szélsőértéke csak olyan (x, y) helyen lehet, ahol

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 5 = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 4 = 0.$$

Ilyen hely csak egy van; koordinátái:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6}{3} = 2; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3}{3} = 1.$$

Hogy e helyen tényleg van-e szélsőérték, azt a

$$z''_{xx}\, z''_{yy} - z''^2_{xy}$$

kifejezés előjele dönti el.

Mivel

$$z''_{xx} = 2, \; z''_{yy} = 2, \; z''_{xy} = 1,$$

azért

$$z''_{xx}\, z''_{yy} - z''^2_{xy} = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0.$$

Tehát van szélsőérték éspedig minimum, mivel $z''_{xx} > 0$ és $z''_{yy} > 0$.

3. Az $a = 225$ pozitív számot bontsuk fel úgy 5 pozitív összeadandóra, hogy ezen összeadandók szorzata maximum legyen!

Legyenek e pozitív összeadandók:

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4, \; x_5,$$

melyekre

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 225.$$

A függvény, melynek szélsőértékét keressük:

$$f = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = x_1 x_2 x_3 x_4 (225 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4).$$

Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2\, x_3\, x_4 (225 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) - x_1\, x_2\, x_3\, x_4 =$$
$$= x_2\, x_3\, x_4 (225 - 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1\, x_3\, x_4 (225 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) - x_1\, x_2\, x_3\, x_4 =$$
$$= x_1\, x_3\, x_4 (225 - x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1\, x_2\, x_4 (225 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) - x_1\, x_2\, x_3\, x_4 =$$
$$= x_1\, x_2\, x_4 (225 - x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = x_1\, x_2\, x_3 (225 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) - x_1\, x_2\, x_3\, x_4 =$$
$$= x_1\, x_2\, x_3 (225 - x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4).$$

Mivel a feladat fogalmazása szerint azok az (x_1, x_2, x_3, x_4) értékrendszerek, amelyek egyes számai között zérusértékűek előfordulnak, ki vannak zárva, a tekintetbe vövő értékrendszerek a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 225, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 225, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 225, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 225 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszerből adódnak. Ha az egyenleteket összeadjuk, az

$$5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 4 \cdot 225$$

vagy

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 180$$

egyenlet adódik. Ha ezt levonjuk az egyenletrendszer összes egyenleteiből, az

$$x_1 = 45, \; x_2 = 45, \; x_3 = 45, \; x_4 = 45$$

megoldást kapjuk. Ez egyben az egyetlen megoldás, mert az egyenletrendszer együtthatóinak determinánsa 0-tól különbözik:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Szélsőérték tehát csak az

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 45$$

helyen lehetséges.

Hogy e helyen van-e szélsőérték és ez minő, azt a Hesse-féle determináns segítségével döntjük el. Képezzük f-nek másodrendű parciális differenciálhányadosait:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = x_3 x_4 (225 - 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4) - x_2 x_3 x_4 \,;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -2x_2 x_3 x_4 \,; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = x_2 x_4 (225 - 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4) - x_2 x_3 x_4 \,;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -2x_1 x_3 x_4 \,; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_4} = x_2 x_3 (225 - 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4) - x_2 x_3 x_4 \,;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = -2x_1 x_2 x_4 \,; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = x_1 x_4 (225 - x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4) - x_1 x_3 x_4 \,;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2} = -2x_1 x_2 x_3 \,; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_4} = x_1 x_3 (225 - x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4) - x_1 x_2 x_4 .$$

A Hesse-féle determináns elemeit kapjuk, ha e másodrendű parciális differenciálhányadosokba az

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 45$$

értékeket helyettesítjük. E helyettesítési értékek lesznek:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial y_k} = \begin{cases} -\, 2 \cdot 45^3, & \text{ha } i = k, \\ -\, 45^3, & \text{ha } i \neq k. \end{cases}$$

A Hesse-féle determináns eszerint, ha a sorok elemeinek közös tényezőit mindjárt kiemeljük:

$$45^{12} \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

A sarokdeterminánsok sorozata (a pozitív 45^{12} szorzót elhagyva):

$$-\,2\,; \quad \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3\,; \quad \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\,4;$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 5,$$

azaz

$$-2; \quad 3; \quad -4; \quad 5.$$

Tehát a páros rendű sarokaldeterminánsok pozitívak, a páratlan rendűek előjele pedig egyenlő p_{11} előjelével. És mivel ez negatív, azért a kiszámított helyen maximum van.

Végeredményben az

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 45$$

értékrendszer esetén az f függvénynek maximuma van. E maximum értéke: $f = 45^5$.

4. Adott $2s$ kerületű háromszögek között melyiknek területe a legnagyobb?

Ha a háromszög oldalai x, y, z és területének mérőszáma T, akkor *Heron* képlete alapján

$$T^2 = s(s - x)\,(s - y)\,(s - z),$$

ahol

$$2s = x + y + z.$$

Ha z-t kiküszöböljük:

$$T^2 = s(s - x)\,(s - y)\,(x + y - s) \equiv f(x, y);$$

és T nyilván maximummá lesz, ha $T^2 = f(x, y)$ lesz azzá.

A

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\, s(s - y)\,(x + y - s) + s(s - x)\,(s - y) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\, s(s - x)\,(x + y - s) + s(s - x)\,(s - y) = 0$$

egyenletrendszer adja azokat az x, y értékrendszereket, melyeknek szélsőértékek felelhetnek meg. Ezt az egyenletrendszert így írhatjuk:

$$(s - y)(2x + y - 2s) = 0,$$
$$(s - x)(x + 2y - 2s) = 0.$$

A baloldalon álló szorzatok eltűnéséből következő $s = y$ vagy $s = x$ értékek, mint megoldások, geometriai szempontból nem jöhetnek tekintetbe, mert pl. $s = y$ azt jelentené, hogy

$$2s = x + y + z = 2y, \quad \text{vagy} \quad x + z = y\,;$$

de ez lehetetlen, mert valódi háromszögben $x + z > y$. A megoldás gyanánt tekintetbe jövő értékrendszerek tehát a

$$2x + y = 2s,$$
$$x + 2y = 2s$$

egyenletrendszerből adódnak. Innen

$$x = \frac{2s}{3}, \quad y = \frac{2s}{3}, \quad \text{és akkor} \quad z = \frac{2s}{3},$$

ez az egyetlen megoldás. Ha tehát egyáltalán van szélsőérték, azt a $2s$ kerületű egyenlőoldalú háromszög szolgáltatja.

Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat a kérdéses helyen:

$$f''_{xx} = -2s(s - y) = -\frac{2\,s^2}{3}; \qquad f''_{xy} = s(2x + 2y - 3s) = -\frac{s^2}{3};$$

$$f''_{yy} = -2s(s - x) = -\frac{2\,s^2}{3}.$$

Ezekkel

$$f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} = \frac{s^4}{3} > 0,$$

tehát van szélsőérték, és mivel $f''_{xx} < 0$ és $f''_{yy} < 0$, ez maximum.

5. A tér n különböző

$$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), \ldots, P_n(x_n, y_n, z_n)$$

pontjában legyen n tömegpont: $m_1, m_2, \ldots, m_n$. A $\overline{PP_i}$ távolságot r_i-vel jelölve ($i = 1, 2, \ldots, n$), a $P(x, y, z)$ pontot határozzuk meg úgy, hogy $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ (azaz a rendszer P-re vonatkozó másodrendű nyomatéka) minimum legyen.

Az

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1} m_i \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\right]$$

függvény minimumát kell megkeresnünk.

A

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sum_{i=1}^{n} m_i (x - x_i) = 2x \sum_{i=1}^{n} m_i - 2\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\sum_{i=1}^{n} m_i (y - y_i) = 2y \sum_{i=1}^{n} m_i - 2\sum_{i=1}^{n} m_i y_i = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2\sum_{i=1}^{n} m_i (z - z_i) = 2z \sum_{i=1}^{n} m_i - 2\sum_{i=1}^{n} m_i z_i = 0$$

egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad z = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Ez a három koordináta az n tömegpontból álló rendszer tömegközéppontját adja. A másodrendű parciális differenciálhányadosok, a $\sum_{i=1}^{n} m_i = M$ jelölés bevezetésével:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2M; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2M; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2M;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} = 0.$$

Így a Hesse-féle determináns:

$$\begin{vmatrix} 2M & 0 & 0 \\ 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 2M \end{vmatrix}.$$

A sarokdeterminánsok sorozata:

$$2M; \quad \begin{vmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 2M \end{vmatrix} = 4M^2; \quad \begin{vmatrix} 2M & 0 & 0 \\ 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 2M \end{vmatrix} = 8M^3.$$

Ezek mind pozitívok, tehát a tömegközéppontban f-nek valóban minimuma van.

6. Valamely síkháromszög szögeit ugyanazzal a mérőeszközzel és ugyanazzal az eljárással megmérve, a talált α, β, γ értékek összege a legtöbb esetben 180°-tól különböző lesz:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 + h.$$

Kérdés, mekkora értékekkel kell α, β, γ értékét kiigazítanunk, hogy 1. összegük pontosan 180° legyen, 2. hogy a kiigazítások négyzetösszege minimum legyen?

Ha α, β, γ kiigazításai rendre x, y, z, akkor az 1. követelés szerint

$$(\alpha + x) + (\beta + y) + (\gamma + z) = 180^\circ$$

és mivel

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ + h,$$

azért

$$x + y + z = -h.$$

γ kiigazítása, z így fejezhető ki:

$$z = -h - x - y.$$

Ha most számot vetünk a 2. követeléssel, akkor a feladat az, hogy a kiigazítások négyzetösszege:

$$f(x, y) \equiv x^2 + y^2 + (-h - x - y)^2$$

x és y alkalmas választásával minimum legyen.

Képezve az

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = x + h + x + y = 2x + y + h = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = y + h + x + y = x + 2y + h = 0$$

egyenletrendszert, ennek

$$x = -\frac{h}{3}, \quad y = -\frac{h}{3}$$

z egyetlen gyökrendszere. Minthogy továbbá

$$f''_{xx} = 4, \; f''_{yy} = 4, \; f''_{xy} = 2,$$

azért

$$f''_{xx} f''_{yy} - f''_{xy} = 4 \cdot 4 - 2^2 = 12 > 0.$$

Így a kapott

$$x = -\frac{h}{3}, \quad y = -\frac{h}{3}, \quad z = -h + \frac{h}{3} + \frac{h}{3} = -\frac{h}{3}$$

kiigazítások négyzetösszege valóban minimum.

Figyelemreméltó körülményként kiemeljük, hogy a szögösszegnek 180°-tól való h eltérése nem α, β, γ arányában, hanem mindegyik szögre egyenletesen osztandó szét, mert mindegyik szögre a kiigazítás $-\frac{h}{3}$-nak adódott.

β) Feltételes szélsőértékek

1. Meghatározandók a

$$\varphi(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

gömbfelületnek az adott (és az origótól különböző) $P(a, b, c)$ ponthoz maximális és minimális távolságra fekvő pontjai.

E távolság helyett négyzetének, azaz az

$$f(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$

függvénynek szélsőértékeit kereshetjük a $\varphi = 0$ feltétel mellett.

Most

$$F = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)$$

és így feltételes szélsőérték csak ott lehet, ahol

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} = x - a + \lambda x = 0\,;$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} = y - b + \lambda y = 0\,;$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z} = z - c + \lambda z = 0.$$

Innen

$$x = \frac{a}{1+\lambda}, \quad y = \frac{b}{1+\lambda}, \quad z = \frac{c}{1+\lambda}.$$

Ezeket a $\varphi = 0$ egyenletbe helyettesítve:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(1+\lambda)^2} - r^2 = 0,$$

azaz

$$1 + \lambda = \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{r}.$$

Így két értékrendszert kapunk:

1. $x = \dfrac{a\,r}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$; $y = \dfrac{b\,r}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$; $z = \dfrac{c\,r}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$;

2. $x = -\dfrac{a\,r}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$; $y = -\dfrac{b\,r}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$; $z = -\dfrac{c\,r}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Annak eldöntése céljából, hogy a gömbfelület e két pontjában van-e szélsőérték, képezzük F-nek másodrendű parciális differenciálhányadosait:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 1 + \lambda\,; \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 1 + \lambda\,; \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 1 + \lambda\,;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z} = 0.$$

A Hesse-féle determináns az 1. esetben:

$$\begin{vmatrix} 2\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 2\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 2\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{r} \end{vmatrix}.$$

Ennek sarokaldeterminánsai mind pozitívok, tehát ez esetben feltételes minimum van.

A 2. esetben:

$$\begin{vmatrix} -2\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{r} & 0 & 0 \\ 0 & -2\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{r} & 0 \\ 0 & 0 & -2\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{r} \end{vmatrix}.$$

Ennek sarokaldeterminánsai —, +, — előjelűek, tehát ez esetben feltételes maximum van.

Megállapítható, hogy a szélsőértékeket szolgáltató pontok az OP egyenesnek a gömbbel való metszéspontjai.

2. Határozzuk meg az r sugarú gömbbe írható legnagyobb köbtartalmú derékszögű parallelepipedont.

Mivel a derékszögű parallelepipedon átlóinak metszéspontja a csúcsaitól egyenlő távolságra van, a parallelepipedon középpontja egyszersmind a köréje írt gömbnek is középpontja. E középpontba helyezzük el a koordinátarendszer kezdőpontját; a tengelyeket pedig úgy, hogy a parallelepipedon éleivelpárhuzamosak legyenek. A parallelepipedon élei tehát $2x$, $2y$, $2z$ hosszúságúak. A köbtartalom mérőszáma pedig

$$f(x, y, z) = 8xyz.$$

Emellett, mivel a csúcspontok a gömb pontjai, fenn kell állania a

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

mellékfeltételnek.

A feladat tehát f szélsőértékeinek meghatározását kívánja a $\varphi = 0$ feltételnek megfelelő (x, y, z) pontok tartományában. E célból képezzük az

$$F = f + \lambda\varphi = 8xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)$$

függvény bevezetésével az

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} = 4yz + \lambda x = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} = 4xz + \lambda y = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z} = 4xy + \lambda z = 0$$

egyenletrendszert, melynek egyenleteiből rögtön következik, hogy

$$-4xyz = \lambda x^2 = \lambda y^2 = \lambda z^2,$$

ahonnan

$$x^2 = y^2 = z^2.$$

A választott koordinátarendszerben x, y és z pozitív számok, így

$$x = y = z$$

adódik.

Ezeket az értékeket a $\varphi = 0$ egyenletbe helyettesítve,

$$x = y = z = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

egyetlen értékrendszer adódik, amelynek szélsőérték felelhet meg. Emellett λ számára a $\lambda = -\frac{4r}{\sqrt{3}}$ érték adódik. Hogy ezen értékrendszernek valóban szélsőérték felel-e meg, azt F második parciális differenciálhányadosai segítségével döntjük el.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda = -\frac{8r}{\sqrt{3}}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda = -\frac{8r}{\sqrt{3}}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2\lambda = -\frac{8r}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = 8z = \frac{8r}{\sqrt{3}}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial z} = 8y = \frac{8r}{\sqrt{3}}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial z} = 8x = \frac{8r}{\sqrt{3}}.$$

Ezekkel a Hesse-féle determináns, figyelmen kívül hagyva az egyes sorokból kiemelhető állandó szorzót, a következő:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

A sarokaldeterminánsok sorozata:

$$-1; \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

A közbülső 0 miatt az előjelelosztásról semmit sem tudunk mondani. A feladat további vizsgálatot igényel.

A Hesse-féle determináns együtthatói a

$$-\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 + 2\xi\eta + 2\xi\zeta + 2\eta\zeta$$

quadratikus alak együtthatóinak determinánsa. E quadratikus alak értékkészletének előjeleloszlása határozatlan.

Képezzük φ-nek elsőrendű parciális differenciálhányadosait:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x = \frac{2r}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y = \frac{2r}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2z = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Ezekkel

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\zeta = \frac{2r}{\sqrt{3}}(\xi + \eta + \zeta) = 0,$$

ahonnan pl.

$$\zeta = -\xi - \eta.$$

Ezt behelyettesítjük az előbb határozatlannak talált quadratikus alakba. Lesz:

$$-\xi^2 - \eta^2 - \xi^2 - \eta^2 - 2\xi\eta + 2\xi\eta - 2\xi^2 - 2\xi\eta - 2\xi\eta - 2\eta^2 =$$

$$= -4\xi^2 - 4\eta^2 - 4\xi\eta.$$

Ehhez a quadratikus alakhoz tartozó determináns:

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

sarokaldeterminánsainak sorozata:

$$-4\,; \quad \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 12.$$

A páros rendű aldetermináns pozitív, az egyetlen páratlan rendű negatív, tehát a vizsgált helyen a függvénynek maximuma van.

Vagyis a gömbbe írható legnagyobb térfogatú derékszögű parallelepipedon a kocka.

3. Határozzuk meg az

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy$$

függvény *(quadratikus alak)* szélsőértékeit a $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ feltétel mellett!

Mindenekelőtt a feltételi egyenletből megállapítható, hogy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

miatt

$$|x| \leqq 1\,, |y| \leqq 1\,, |z| \leqq 1\,,$$

azaz a változók tartománya folytonos, összefüggő és korlátos. Minthogy pedig $f(x, y, z)$ mint racionális egész függvény, e tartomány minden belső és határhelyén folytonos *Weierstrass tétele* szerint $f(x, y, z)$ e tartományon belül vagy ennek határán **legalább** egy helyen eléri a maximumát, illetve a minimumát. Ily módon feltételes szélsőértékek létezése eleve biztosítva van, s így csak azoknak a helyeknek meghatározásával kell foglalkoznunk, amelyeken ezek bekövetkeznek.

Bevezetjük az

$$F = f(x, y, z) - \lambda\varphi(x, y, z)$$

függvényt. (Szándékosan vettünk $-\lambda$-t, hogy eredményünk összhangban legyen a szokásos jelöléssel!)

Feltételes szélsőérték csak ott lehetséges, ahol

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y - \lambda x = (2 - \lambda)\,x + y = 0\,,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + x - \lambda y = x + (2 - \lambda)\,y = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z} = 2z - \lambda z = (2 - \lambda)\,z = 0.$$

A nyert

$$(2-\lambda)x + y = 0,$$
$$x + (2-\lambda)y = 0,$$
$$(2-\lambda)z = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer gyökei szolgáltatják azokat a helyeket, ahol szélsőérték lehet. E homogén lineáris egyenletrendszernek csak nem-triviális megoldásai érdekelnek, mert a feltételi egyenlet szerint nem lehet, hogy x, y, z egyidejűleg 0-val legyenek egyenlők. Nem-triviális megoldás akkor van, ha az egyenletrendszer együtthatóiból alkotott determináns 0. Az egyenletrendszer együtthatóiból alkotott determinánst 0-val egyenlővé téve a quadratikus alakhoz tartozó ú. n. *karakterisztikus egyenlet* adódik (mely a matematika és fizika számos fejezetében szerepel és arról nevezetes, hogy összes gyökei valós számok).

A mi esetünkben a karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Kifejtve:

$$(2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0.$$

Tehát vagy

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

s akkor

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 1, \\ 3, \end{cases}$$

vagy

$$2 - \lambda = 0,$$

s akkor

$$\lambda = 2.$$

Így a karakterisztikus egyenlet gyökei (az ú. n. sajátértékek):

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3.$$

$\lambda_1 = 1$ esetén:

$$x_1 + y_1 = 0,$$
$$x_1 + y_1 = 0,$$
$$z_1 = 0.$$

Azaz

$$x_1 : y_1 : z_1 = 1 : -1 : 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} : -\frac{1}{\sqrt{2}} : 0.$$

$\lambda_2 = 2$ esetén:

$$y_2 = 0,$$
$$x_2 = 0,$$
$$0 \cdot z_2 = 0,$$

ahonnan

$$x_2 : y_2 : z_2 = 0 : 0 : 1.$$

Végül $\lambda_3 = 3$ esetén:

$$-x_3 + y_3 = 0,$$
$$x_3 - y_3 = 0,$$
$$-z_3 = 0,$$

ahonnan

$$x_3 : y_3 : z_3 = 1 : 1 : 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{2}} : 0.$$

Szélsőérték lehet tehát a következő három értékrendszernél:

1. $$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ z_1 = 0,;$$

2. $$x_2 = 0,\quad y_2 = 0,\quad z_2 = 1;$$

3. $$x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ z_3 = 0.$$

A további bonyolult vizsgálat helyett gyorsabban célt érünk, ha a függvény értékét a kérdéses helyeken kiszámítjuk.

1. esetben: $$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

2. esetben:

$$f(0, 0, 1) = 2.$$

3. esetben:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Tehát minimum van az 1. esetben, maximum a 3. esetben.

Figyelemreméltó, hogy a szélsőértékek megegyeznek a karakterisztikus egyenlet gyökeivel (a sajátértékekkel)!

Feladatok

a) Határozzuk meg a következő explicit alakban adott függvények szélsőértékeit:

1. $z = x^2 + y^2 + xy - 6x + 3y.$
2. $z = x^3y^2(2 - x - y).$
3. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$
4. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$
5. $z = x^3 + y^3 - 9xy.$
6. $z = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2).$

7. $z = \sqrt{(2-x)(2-y)(x+y-2)}$.

8. $z = \dfrac{2+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

9. $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$; $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$.

10. $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x$.

b) Határozzuk meg a következő feladatokban az x és y függvényeként implicit alakban megadott z függő változó szélsőértékeit:

1. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.

2. $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0$.

3. $6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 4x - 8y - 8z + 5 = 0$.

4. $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$.

5. $x^3y - 3xy^2 + 6x + y^2 + 7y + z^2 - 3z - 14 = 0$.

c) Határozzuk meg az alábbi feladatokban szereplő függvényeknek a feltüntetett feltételek melletti szélsőértékeit:

1. $z = x + y$; $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{4}$.

2. $z = x^2 + y^2$; $x + y = 6$.

3. $z = xy$; $x^2 + y^2 = 1$.

4. $u = xyz$; $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

5. $u = x^2y^3z^4$; $2x + 3y + 4z = 2$.

6. $u = -x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xz$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

7. $u = 2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

8. $u = x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 8yz$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

9. $u = 7x^2 + y^2 + z^2 + 8xy + 8xz - 16yz$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

d) 1. Felül nyitott, derékszögű parallelepipedon alakú tartályt kell készíteni, melynek köbtartalma 4 m³, falvastagsága h. Milyennek válasszuk a tartály méreteit, hogy az elkészítéséhez a legkevesebb anyagra legyen szükség?

2. Egy 10 literes bádogkanna egymásra helyezett hengerből és kúpból áll. Milyen méretek mellett kell a legkevesebb bádog az elkészítéséhez?

3. Valamely sík 0 pontján keresztülmenő $s_1, s_2, \ldots, s_n$ félsugarak egymással alkotott szögeit lemérvén, az

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

számokat találtuk. Ha a mérés abszolút pontos volna, akkor e számok összege pontosan 2π-vel lenne egyenlő. Valójában azonban azt találjuk, hogy

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 2\pi + h.$$

Kérdés, mekkora mennyiségekkel javítandók az egyes α_i-k úgy, hogy a javított értékek összege pontosan 2π legyen és a javítások négyzetösszege minimum legyen.

4. Az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ellipszoidon határozzuk meg azt a pontot, amely a legtávolabb esik a koordinátarendszer kezdőpontjától. ($a > b > c > 0$).

5. Valamely csatorna keresztmetszete egyenlőszárú trapéz, melynek területe T, adott. Milyen hajlású rézsűvel kell az oldalait kiemelni, hogy a víztől áztatott felület minimum legyen?

9. §. FÜGGVÉNYRENDSZEREK, TRANSZFORMÁCIÓK (LEKÉPEZÉSEK)

a) Függvényrendszerek

Az x, y független változóknak

$$u = \varphi(x, y) \quad \text{és} \quad v = \psi(x, y)$$

függvényei függvényrendszert alkotnak. E függvényrendszer kétféleképen értelmezhető:

α) mint leképezés;

β) mint általános görbevonalú koordinátákra való transzformáció.

α) *Leképezések.* Az (x, y) sík mindegyik $P(x, y)$ pontjának van egy megfelelője az (u, v) síkon, a $P'(u, v)$ pont. A függvényrendszer leképezi az (x, y) sík pontjait az (u, v) sík pontjaira. Ha az (x, y) sík különböző pontjainak az (u, v) síkon különböző pontok felelnek meg, akkor a leképezés egyértelmű (egyrétű). Ha továbbá értelmezhető az

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v)$$

függvényrendszer, mely az előbbi leképezés inverzét jelenti, akkor a leképezés kölcsönösen megfordítható és egyértelmű.

A leképezés szemléltetésének egyik módja az, hogy meghatározzuk az $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ egyenesek képeit az (u, v) képsíkon. Az (x, y) sík derékszögű koordinátahálózatának megfelel egy görbevonalú hálózat az (u, v) síkon, és megfordítva.

β) *Görbevonalú koordináták.* Az adott $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ függvényrendszer esetén minden (x, y) síkbeli $P(x, y)$ pont (x, y) koordinátáin kívül, a megfelelő (u, v) koordinátákkal is jellemezhető. Az (u, v) koordinátákhoz tartozó P pont az (x, y) síkban azonnal megkereshető, ha előre meghatározzuk az $u = \varphi(x, y) = \text{const}$, $v = \psi(x, y) = \text{const}$ görbeseregeket. E görbeseregek vonalai az (x, y) sík görbevonalú (u, v) koordináta vonalai. Így a P pontot meghatározó (u, v) számok e pont görbevonalú koordinátái.

Mindez általánosítható több független változós függvényrendszerekre. Három független változó esetén térbeli leképezésről, ill. térbeli görbevonalú koordinátarendszerről van szó.

b) Jacobi-féle determináns

A kölcsönösen megfordítható, egyértelmű leképezhetőség szükséges (és kicsinyben elégséges) feltétele, hogy az

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$

függvényeknek folytonos elsőrendű parciális deriváltjaik legyenek, továbbá a függvényrendszer

$$D = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \varphi'_x \psi'_y - \varphi'_y \psi'_x$$

ún. *Jacobi-féle determinánsa (függvénydeterminánsa)* 0-tól különböző legyen. (E függvénydetermináns fontos szerepet játszik a tartományintegrálok transzformációjánál. L. a *Többváltozós függvények integrálása* című kötetet.)

Az inverz

$$x = g(u, v), \ y = h(u, v)$$

függvényrendszer függvénydeterminánsa:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{D} = g'_u h'_v - g'_v h_u.$$

Fennáll tehát, hogy

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1.$$

c) Összetett függvényrendszerek

Az

$$u = \Phi(\varphi(x, y), \psi(x, y)), \ v = \Psi(\varphi(x, y), \psi(x, y))$$

összetett függvényrendszer az

$$u = \Phi(\xi, \eta), \ v = \Phi(\xi, \eta)$$

és

$$\xi = \varphi(x, y), \ \eta = \psi(x, y)$$

függvényrendszerek összetétele. Fennáll, hogy

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}.$$

d) Vektorterek

Tekintsük a következő három háromváltozós függvényből álló függvényrendszert:

$$p = p(x, y, z), \ q = q(x, y, z), \ r = r(x, y, z).$$

Ha az x, y, z független változókat az **r** helyvektor koordinátáinak, a p, q, r függőváltozókat pedig a **v** vektor koordinátáinak fogjuk fel, akkor ez a függvényrendszer a

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = p(x, y, z)\,\mathbf{i} + q(x, y, z)\,\mathbf{j} + r(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

vektor-vektor függvényt (vektorteret) jelenti. (L. a *Vektoranalízis* c. kötetet.)

Példák

1. Szemléltessük a kezdőpont kivételével mindenütt értelmezett

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

függvényrendszert.

Evégből meghatározzuk az $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ egyenesek megfelelőit az (x, y) síkon.

Ha

$$\frac{x}{x^2+y^2}=a,$$

akkor

$$x^2+y^2=\frac{x}{a},$$

vagy

$$\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2+y^2=\frac{1}{4a^2}.$$

Tehát az $u=a=\text{const}$ egyeneseknek $\frac{1}{2a}$ sugarú körök felelnek meg, melyek középpontjainak sorozó egyenese az x tengely, és keresztül mennek az origón.

Hasonlóan, ha

$$\frac{y}{x^2+y^2}=b,$$

akkor

$$x^2+y^2=\frac{y}{b},$$

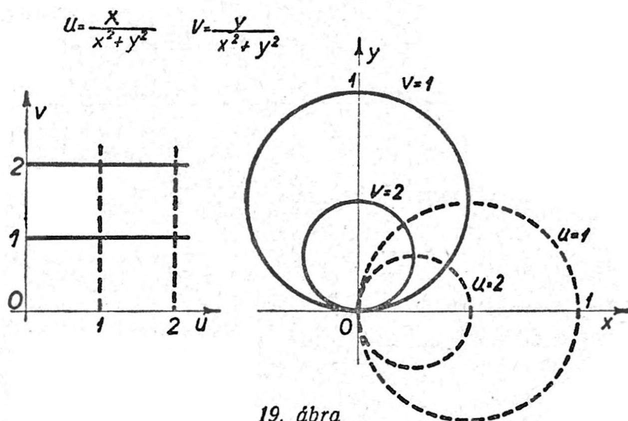
vagy

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2b}\right)^2=\frac{1}{4b^2}.$$

Tehát a $v=b=\text{const}$ egyeneseknek $\frac{1}{2b}$ sugarú körök felelnek meg, melyek középpontjainak sorozó egyenese az y tengely, és keresztül mennek az origón (19. ábra).

A leképezés egyértelmű és megfordítható. Ugyanis

$$u^2+v^2=\frac{1}{x^2+y^2}.$$



19. ábra

Innen megállapítható, hogy az (u, v) síkon fekvő P pont origótól mért távolsága pontosan reciproka a P-nek megfelelő (x, y) síkbeli Q pont origótól mért távolságának. A leképezés tehát nem más, mint az egységsugarú körre való tükrözés (más néven inverzió).

Az inverz leképezést az

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{v}{u^2 + v^2}$$

függvényrendszer határozza meg.

A függvényrendszer függvénydeterminánsa:

mivel

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

azért

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{vmatrix} = \frac{2x^2y^2 - x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^4} =$$

$$= -\frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^4} = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Feladatok

Szemléltessük az előbbihez hasonlóan az alábbi függvényrendszereket és inverzeiket. Határozzuk meg a Jacobi-féle determinánst.

1. $u = x^2 - y^2, \; v = 2xy.$

2. $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \; \varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \quad (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi).$

3. $u = -x + \sqrt{x^2 + y^2}, \; v = -x - \sqrt{x^2 + y^2}.$

10. §. SÍKGÖRBÉK SZINGULÁRIS PONTJAI

Ha az $x = x_0, y = y_0$ helyen, a síkgörbe $f(x, y) = 0$ egyenletében szereplő $f(x, y)$ függvényre fennáll, hogy

$$f(x_0, y_0) = 0, \; f'_x(x_0, y_0) = 0, \; f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

továbbá (feltételezve, hogy $f(x, y)$-nak a vizsgált hely környezetében folytonos másodrendű parciális differenciálhányadosai vannak, és ezek nem mindegyike 0)

1. $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} < 0$, akkor a görbének *csomópontja van*,

2. $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} > 0$, akkor a görbének *izolált pontja van*.

Példák

1. Vizsgáljuk az

$$f(x, y) \equiv x^2 + y^2 - x^2y - y^3 = 0$$

görbét a (0, 0) helyen.

$$f(0, 0) = 0\,;$$

$$f'_x(x, y) = 2x - 2xy, \; f'_x(0, 0) = 0\,;$$

$$f'_y(x, y) = 2y - x^2 - 3y^2, \; f'_y(0, 0) = 0.$$

Kiszámítjuk a második parciális deriváltakat is:

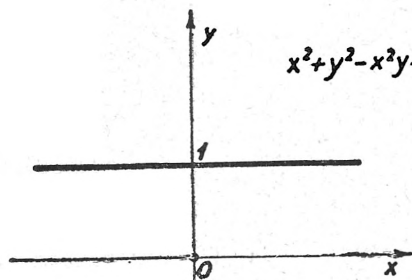
$$f''_{xx}(x, y) = 2 - 2y, \; f''_{xy}(x, y) = -2x, \; f''_{yy} = 2 - 6y.$$

Ezek értéke az adott helyen:

$$f''_{xx}(0, 0) = 2, \; f''_{xy}(0, 0) = 0, \; f''_{yy}(0, 0) = 2.$$

Ezekkel

$$f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} = 4 > 0.$$



20 ábra

A görbének tehát izolált pontja van a (0, 0) helyen.

Egyébként átrendezéssel, kiemeléssel az egyenlet ilyen alakra hozható:

$$f(x, y) \equiv (1 - y)(x^2 + y^2) = 0,$$

ahonnan kiolvasható, hogy a függvény görbéje az $y = 1$ egyenes és az izolált (0, 0) pont (20. ábra).

2. Vizsgáljuk a (0,0) helyen az

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

egyenlettel megadott *Descartes-féle levelet.*

Mivel

$$f(x, y) \equiv x^3 + y^3 - 3axy,$$

azért

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 3ay, \; f'_y(x, y) = 3y^2 - 3ax;$$

$$f''_{xx}(x, y) = 6x, \quad f_{yy} = 6y,$$

$$f''_{xy} = -3a.$$

Az adott helyen:

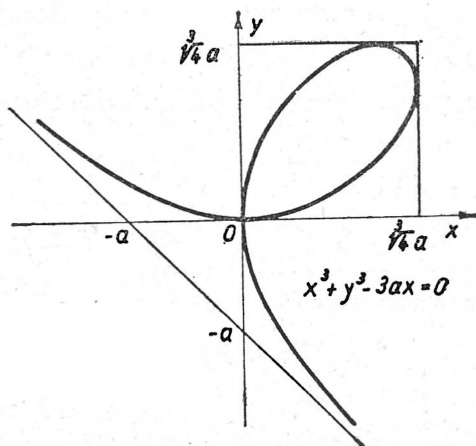
$$f(0, 0) = 0, \; f'_x(0, 0) = 0, \; f_y(0, 0) = 0;$$

$$f''_{xx}(0, 0) = 0, \; f''_{yy}(0, 0) = 0, \; f''_{xy}(0, 0) = -3a.$$

Tehát

$$f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} = -9a^2 < 0,$$

vagyis a kérdéses pont csomópont (21. ábra).



21. ábra

Feladatok

Vizsgáljuk az alábbi egyenletekkel megadott görbéket az adott helyen:

1. $x^4 - 2x^2y + 2y^3 + y^2 = 0, \quad x_0 = 0, \; y_0 = 0.$
2. $x^4 + y^4 = x^2 + y^2, \quad x_0 = 0, \; y_0 = 0.$
3. $x^3 + y^3 - xy = 0. \quad x_0 = 0, \; y_0 = 0.$
4. $y^2 = x^3 + x^2, \quad x_0 = 0, \; y_0 = 0.$

11. §. GÖRBESEREG BURKOLÓJA

Az

$$f(x, y, c) = 0$$

egyenletben szereplő c paraméter minden értékéhez tartozik egy görbe. Az egyenlet tehát egy görbesereget határoz meg.

A görbesereg burkoló görbéjének egyenletét az

$$f(x, y, c) = 0, \; f'_c(x, y, c) = 0$$

egyenletrendszerből kapjuk a c paraméter kiküszöbölésével.

Példák

1. Az

$$(x - c)^2 + y^2 = a^2$$

egyenlet egy a sugarú körsereg egyenlete. Az egyes körök középpontjainak geometria helye az x tengely.

c szerinti parciálisan deriválva:

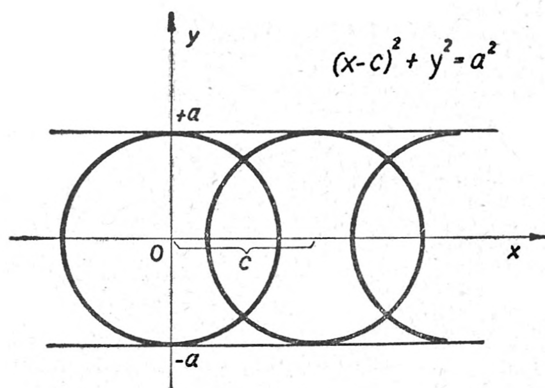
$$-2(x - c) = 0.$$

Ezt behelyettesítve a kiindulási egyenletbe, megkapjuk a körsereg burkolójának egyenletét:

$$y^2 = a^2,$$

vagy

$$y = \pm a. \qquad \text{(22. ábra.)}$$



22 ábra

2. Határozzuk meg az

$$y = cx + \frac{ac}{\sqrt{1 + c^2}}$$

egyenessereg burkolóját. (Ezen egyenesek koordinátatengelyek közé eső szeletei állandó hosszúságúak.)

c szerint parciálisan deriválva:

$$x + \frac{a}{(1 + c^2)^{3/2}} = 0,$$

ahonnan

$$x = -\frac{a}{(1+c^2)^{3/2}}.$$

x-nek ezt az értékét az egyenessereg egyenletébe írva, nyerjük:

$$y = -\frac{ac}{(1+c^2)^{3/2}} + \frac{ac}{(1+c^2)^{1/2}} = \frac{ac^3}{(1+c^2)^{3/2}}.$$

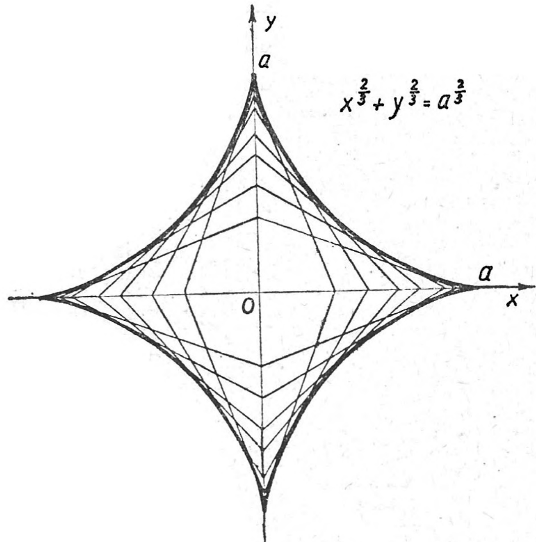
Tehát a burkoló paraméteres egyenletrendszere:

$$x = -\frac{a}{(1+c^2)^{3/2}}, \quad y = \frac{ac^3}{(1+c^2)^{3/2}}.$$

Mindkét egyenletet a $\frac{2}{3}$-ik hatványra emelve és összeadva nyerjük:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Ez egy *asztroid* egyenlete. (23. ábra.)



23. ábra

Feladatok

1. $(x-c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{2}.$

2. Egy egyenes egyenletesen forog egy pont körül, amely adott egyenes mentén adott sebességgel mozog. Határozzuk meg a mozgó egyenes burkolóját!

3. Az $x^2 + y^2 = r^2$ kör y tengellyel párhuzamos húrjaira, mint átmérőkre, köröket szerkesztünk. Határozzuk meg azok burkolóját!

4. Egy kör csúszásmentesen gördül adott egyenes mentén. Határozzuk meg átmérőjének burkolóját.

5. Egy világító pont koordinátái $(r, 0)$. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = r^2$ körről visszaverődő sugarak burkolóját!

EREDMÉNYTÁR

1. §. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK FOGALMA

a) 1.

y \ x	−2	−1	0	1	2
−2	0	−3	−4	−3	0
−1	3	0	−1	0	3
0	4	1	0	1	4
1	3	0	−1	0	3
2	0	−3	−4	−3	0

2.

y \ x	−2	−1	0	1	2
−2	4	2	0	−2	−4
−1	2	1	0	−1	−2
0	0	0	0	0	0
1	−2	−1	0	1	2
2	−4	−2	0	2	4

3.

y \ x	−2	−1	0	1	2
−2	± 2,8284	± 2,2361	±2	± 2,2361	± 2,8284
−1	± 2,2361	± 1,4142	±1	± 1,4142	± 2,2361
0	± 2	±1	0	±1	±2
1	± 2,2361	± 1,4142	±1	± 1,4142	± 2,2361
2	± 2,8284	± 2,2361	±2	± 2,2361	± 2,8284

4.

y \ x	−2	−1	0	1	2
−2	− 0,7568	0,9093	0	− 0,9093	0,7568
−1	0,9093	0,8415	0	− 0,8415	− 0,9093
0	0	0	0	0	0
1	− 0,9093	− 0,8415	0	0,8415	0,9093
2	0,7568	− 0,9093	0	0,9093	− 0,7568

5.

y \ x	−2	−1	0	1	2
−2	−7	−5	−4	−3	−2
−1	−3	−2	−1	0	1
0	−2	−1	0	1	2
1	−3	−2	−1	0	1
2	−7	−5	−4	−3	−2

b) 1. L. 24. ábra.

2. L. 25. ábra.

3. L. 26. ábra.

4. L. 27. ábra.

5. L. 28. ábra.

6. L. 29. ábra.

7. L. 30. ábra.

8. L. 31. ábra.

9. L. 32. ábra.

10. L. 33. ábra.

11. L. 34. ábra.

12. L. 35. ábra.

13. L. 36. ábra.

14. L. 37. ábra.

15. L. 38. ábra.

16. L. 39. ábra.

17. L. 40. ábra.

18. L. 41. ábra.

19. L. 42. ábra.

20. L. 43. ábra.

21. L. 44. ábra.

c) 1. L. 45. ábra.

2. L. 46. ábra.

3. L. 47. ábra.

4. L. 48. ábra.

5. L. 42. ábra. A jelzett ábrán látható felület $u = 0$-nak felel meg. A többi szintfelület ezzel egybevágó és u értékének megfelelően z-irányban párhuzamosan eltolt felület.

d) 1. $x^2 + y^2 \leqq R^2$. L. 49. ábra.

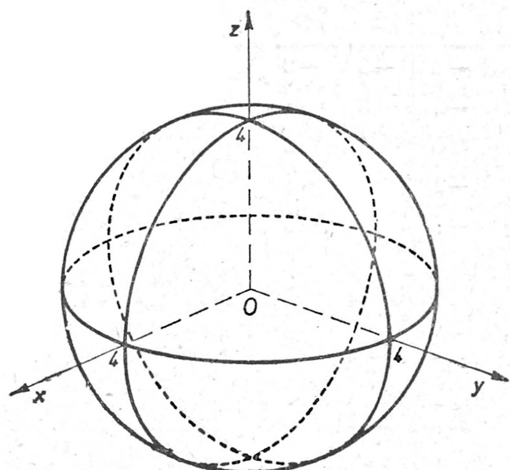
2. $x^2 \geqq y^2$, azaz $|x| \geqq |y|$. L. 50. ábra.

3. Az egész (x, y) sík, kivéve az $x = 0$, $y = 0$ egyeneseket.

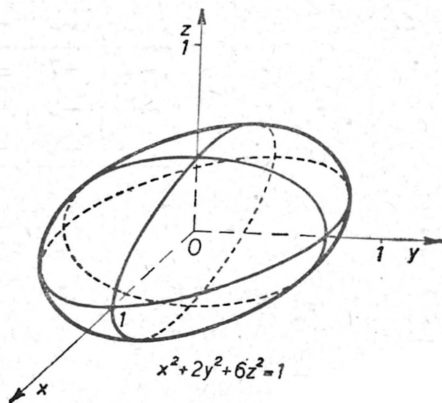
4. $x > 2y \geqq 0$. L. 51. ábra.

5. $x \geqq y^2$. L. 52. ábra.

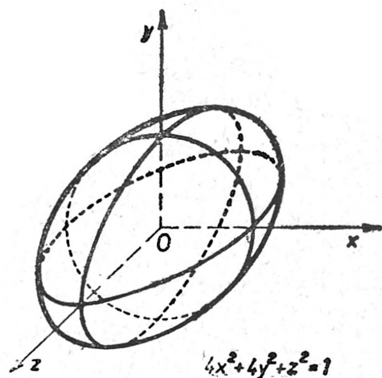
6. $x^2 + 2y^2 \leqq 1$. L. 53. ábra.



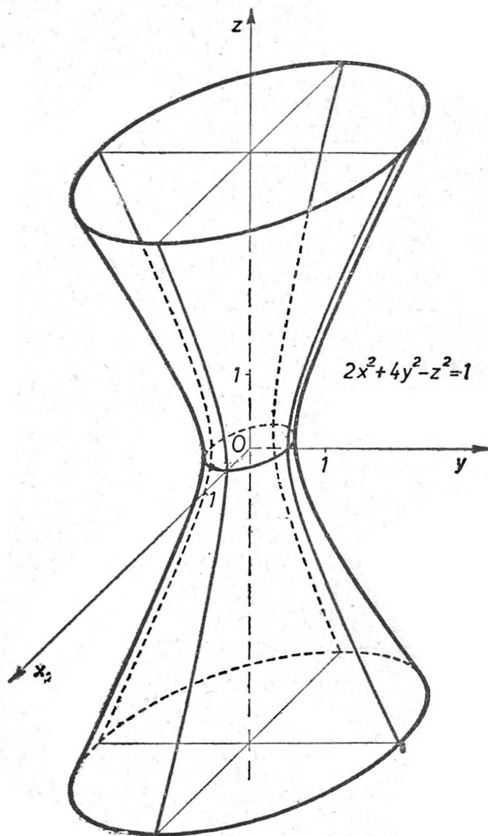
24. ábra



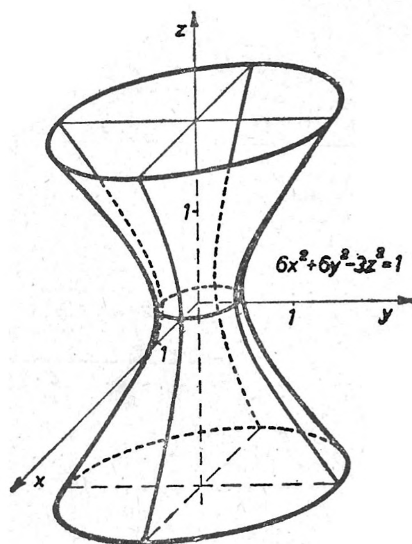
25. ábra



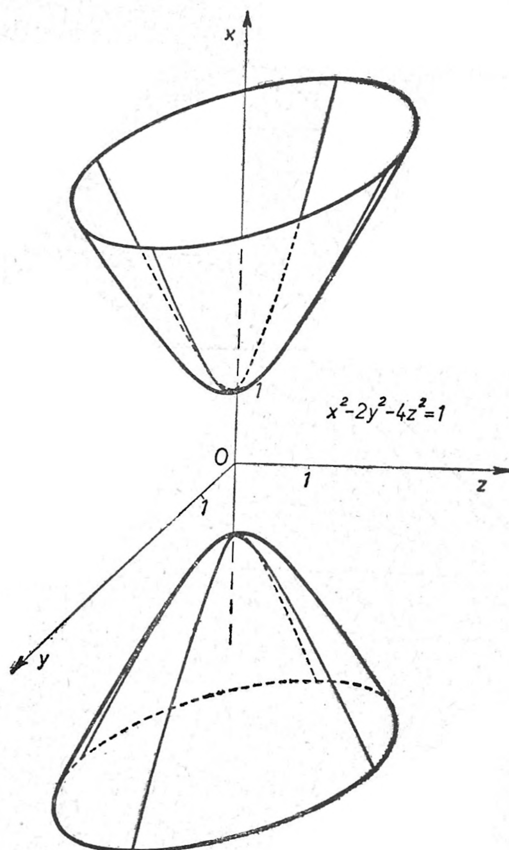
26 ábra



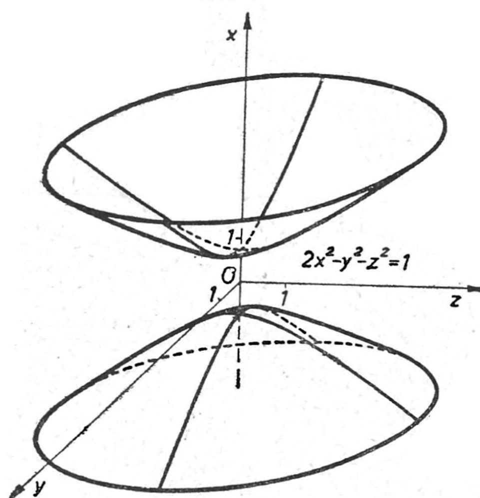
27. ábra



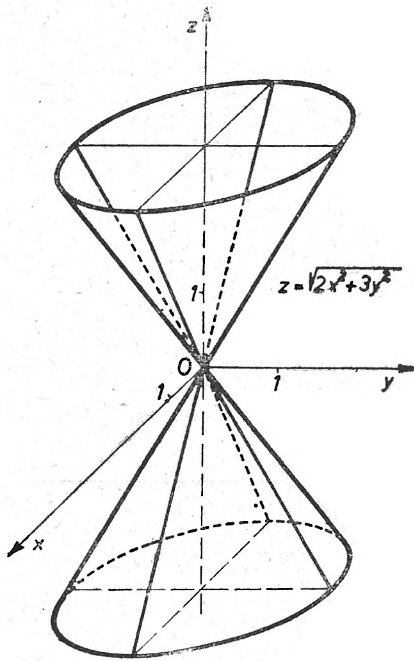
28. ábra



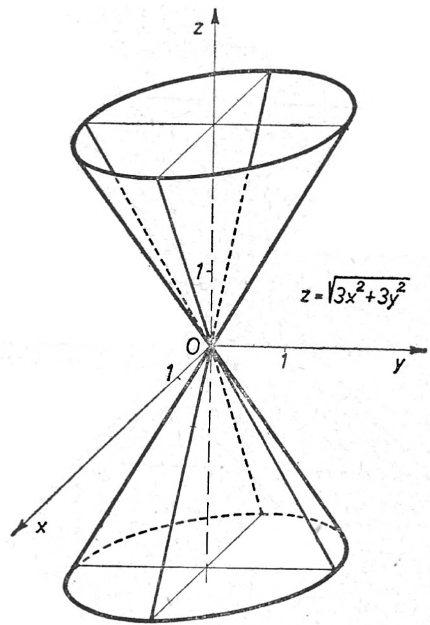
29. ábra



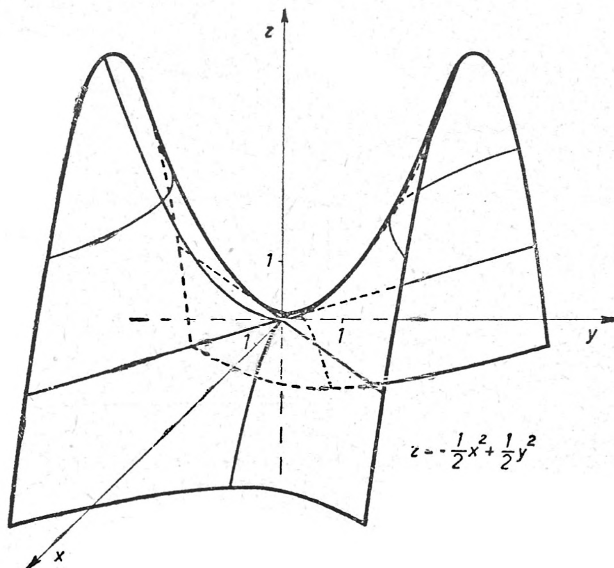
30. ábra



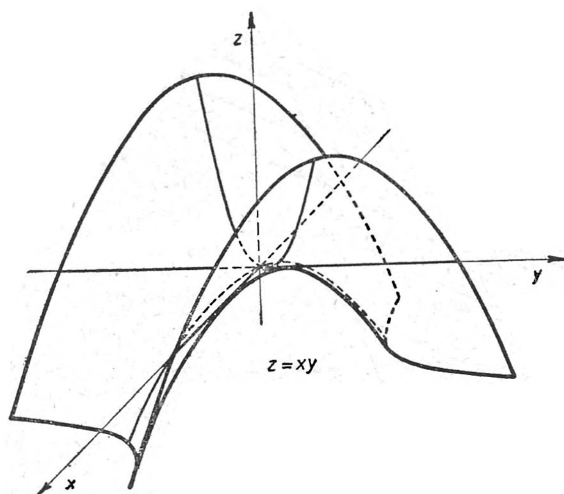
31. ábra



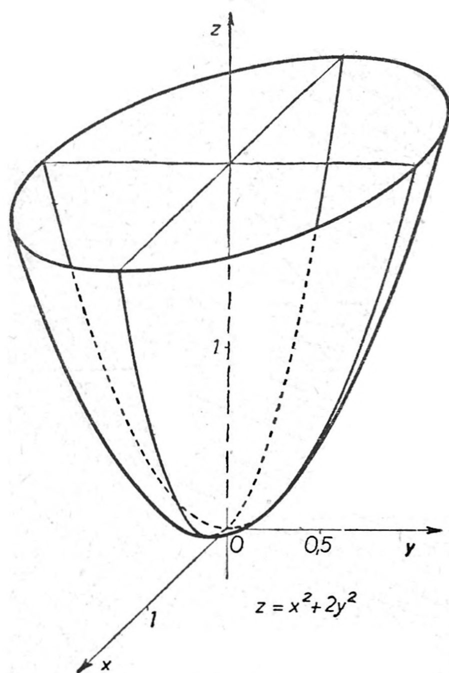
32. ábra



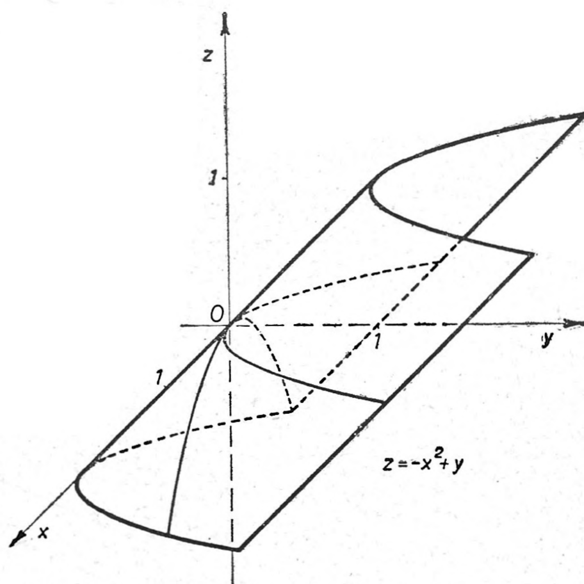
33. ábra



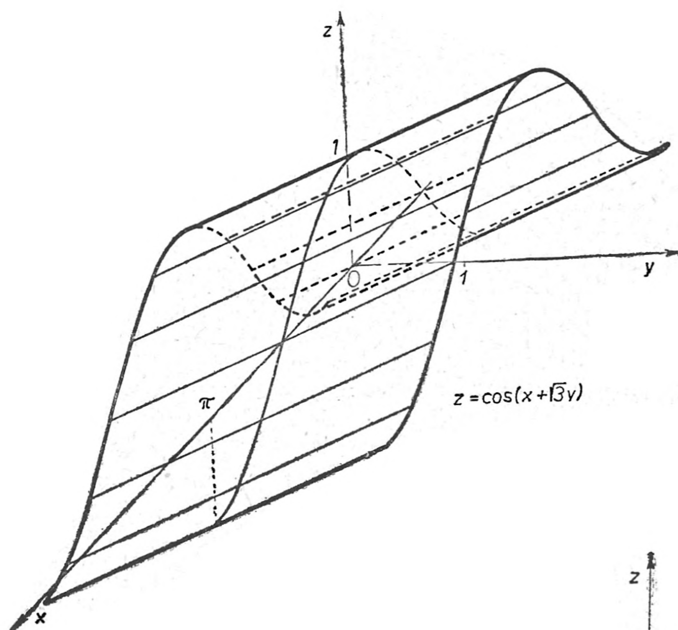
34. ábra



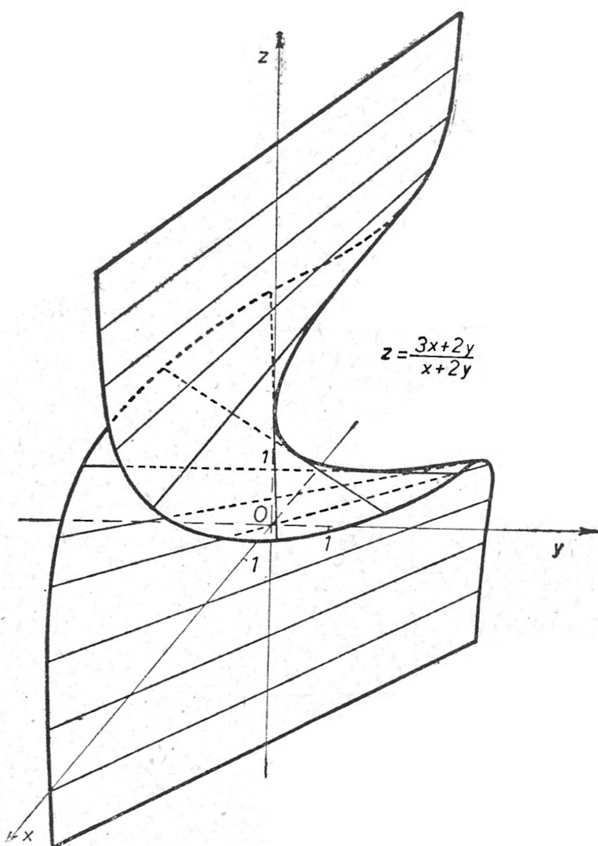
35. ábra



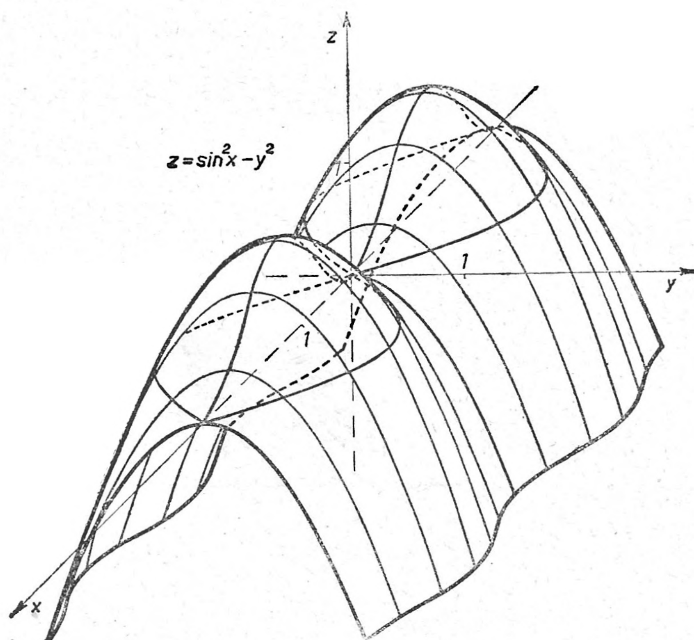
36. ábra



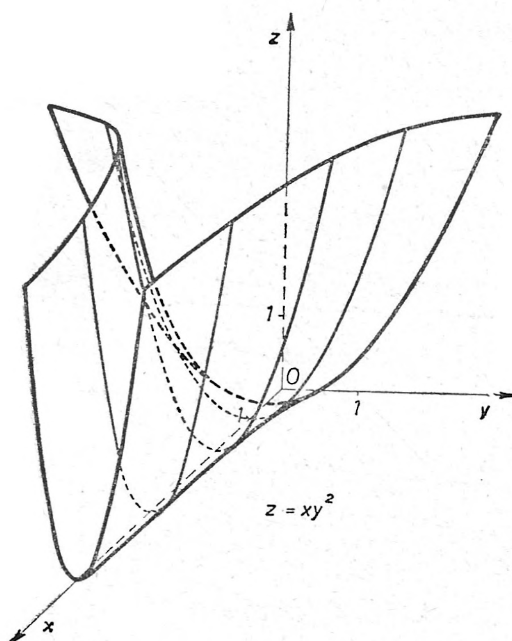
37. ábra



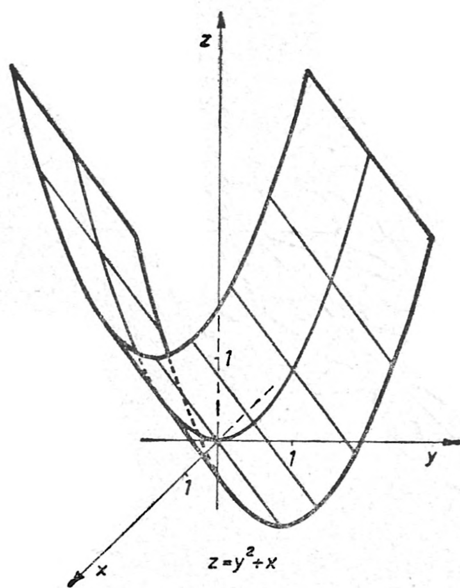
38. ábra



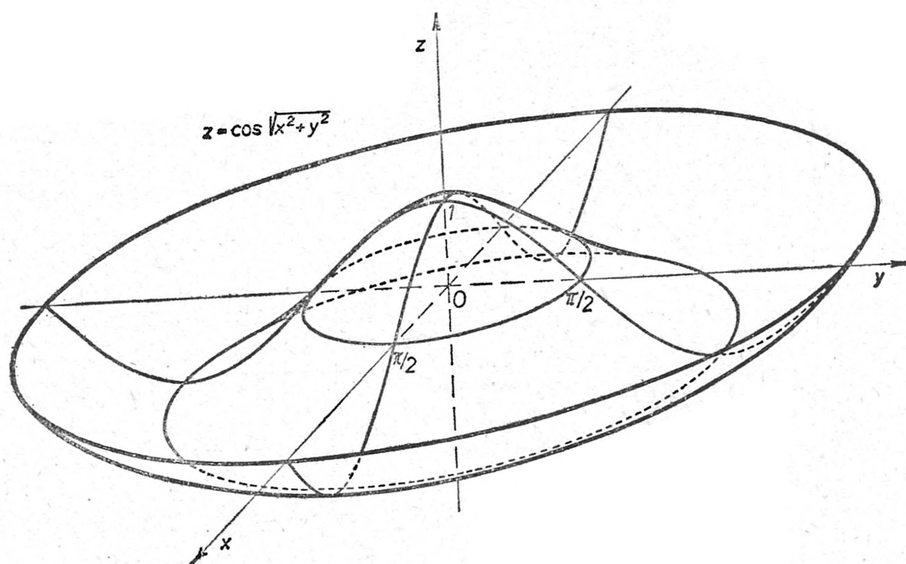
39. ábra



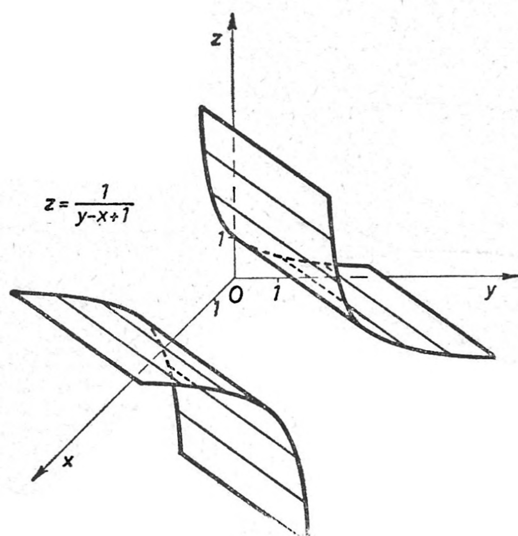
40. ábra



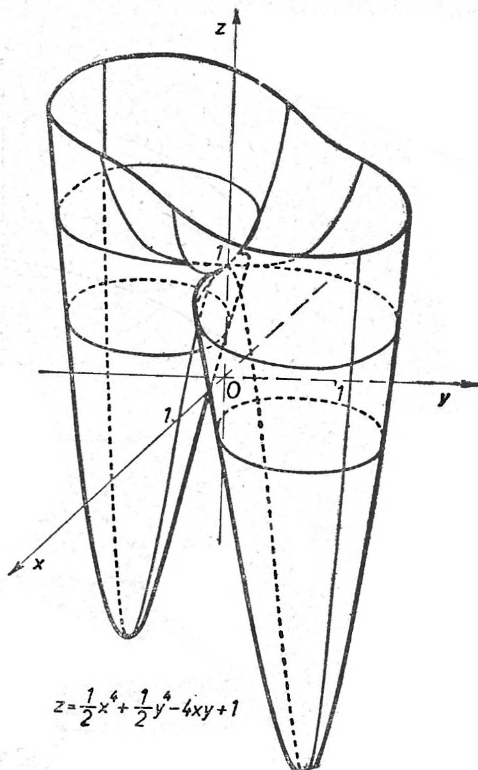
41. ábra



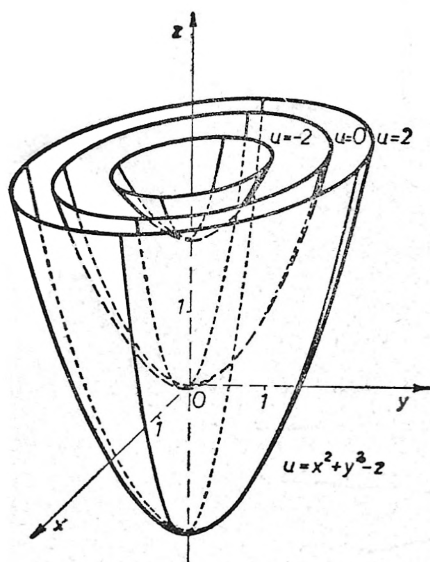
42. ábra



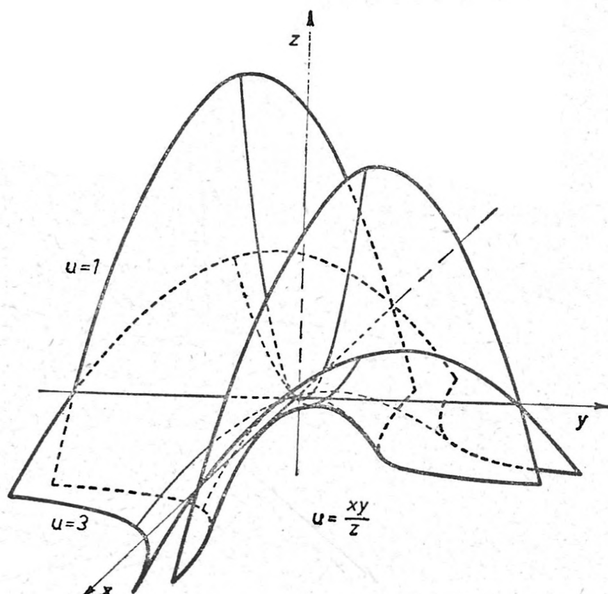
43. ábra



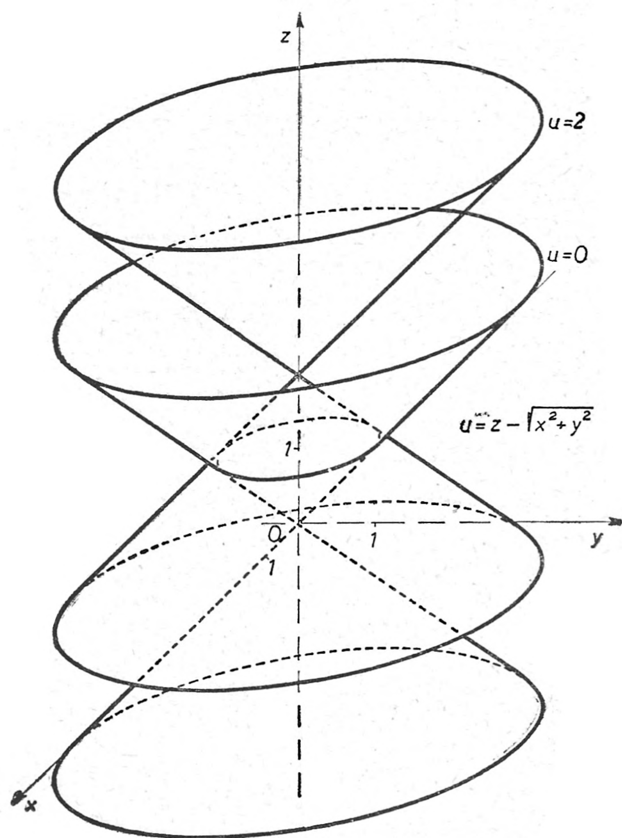
44 ábra



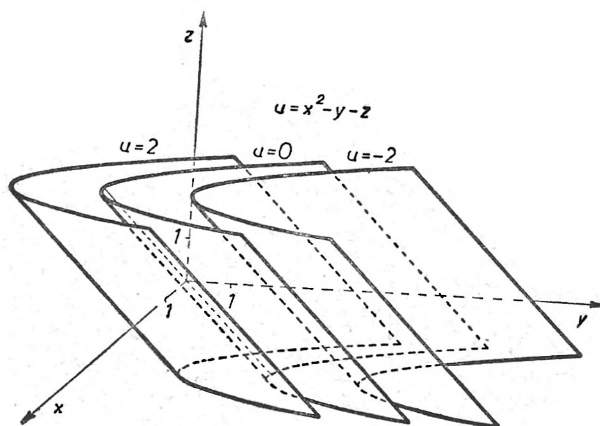
45. ábra



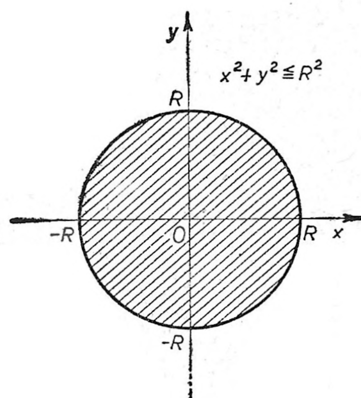
46. ábra



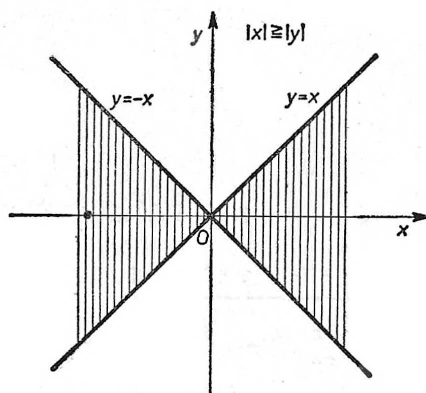
47. ábra



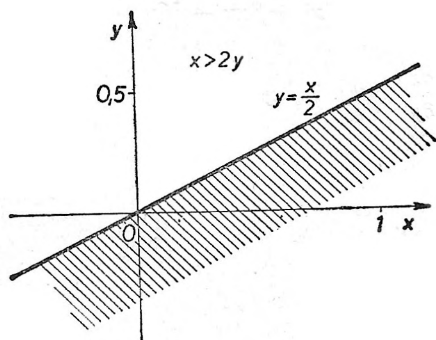
48. ábra



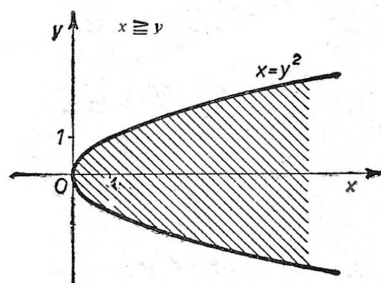
49. ábra



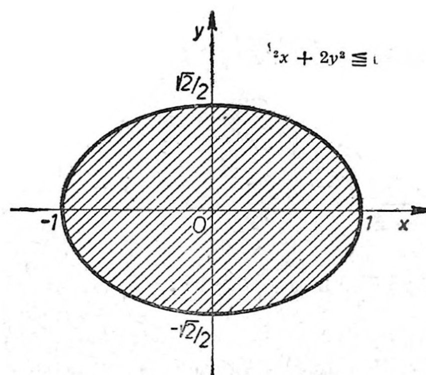
50. ábra



51. ábra



52. ábra



53. ábra

2. §. PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLHÁNYADOS

a) Parciális deriváltak

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 6xy - 3y^2$.

2. $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3yz$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3xz$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - 3xy$.

3. $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 10xy + 3y^2 - 7y + 6$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -5x^2 + 6xy - 16y - 7x$.

4. $\frac{\partial z}{\partial x} = (2ax + by)(ax^2 + bxy + cy^2)^2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = (bx + 2cy)(ax^2 + bxy + cy^2)^3$.

5. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \ln x$.

6. $\frac{\partial z}{\partial x} = -y \sin x + \cos y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos x - x \sin y$.

7. $\frac{\partial z}{\partial x} = e^y + ye^x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^y + e^x$.

8. $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin 2x + \cos x \cos y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin x \sin y - x \sin 2y$.

9. $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \cdot \ln y + \frac{\cos y}{x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sin x}{y} - \sin y \cdot \ln x$.

10. $\frac{\partial u}{\partial x} = y \sin z + z \ln y + e^x y$. $\frac{\partial u}{\partial y} = x \sin z + \frac{xz}{y} + e^x$; $\frac{\partial u}{\partial z} = xy \cos z + x \ln y$.

11. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2y + \frac{y}{2\sqrt{3-x}} e^{\sqrt{3-x}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x - e^{\sqrt{3-x}}$.

12. $\frac{\partial z}{\partial x} = 4xye^{x^2y} + 3y^2a^{xy^2} \cdot \ln a + 6x^2y^2$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2e^{x^2y} + 6xya^{xy} \cdot \ln a + 4x^3y$.

13. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 + 2x \sin xy + x^2 y \cos xy + \frac{y}{x}$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2 + x^2 \cos xy + \ln x$.

14. $\frac{\partial u}{\partial x} = y + z$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x + z$; $\frac{\partial u}{\partial z} = x + y$.

15. $\frac{\partial z}{\partial x} = y e^{xy}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x e^{xy}$.

16. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$.

17. $\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{3}{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{5}{y^2}$.

18. $\frac{\partial u}{\partial x} = z x^{z-1} y^z$; $\frac{\partial u}{\partial y} = z x^z y^{z-1}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z (\ln x + \ln y)$.

19. $\frac{\partial u}{\partial x} = y z^{xy} \cdot \ln z$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x z^{xy} \cdot \ln z$; $\frac{\partial u}{\partial z} = xyz^{xy-1}$.

20. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y \operatorname{tg} \frac{x}{y}} + \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{y}}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2 \operatorname{tg} \frac{x}{y}} - \frac{x \operatorname{tg} \frac{x}{y}}{y^2}$.

b) Metszetgörbék érintőinek iránytangensei

1. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = -\frac{1}{\sqrt{11}}$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = -\frac{2}{\sqrt{11}}$.

2. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = \frac{2}{3}$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = \frac{8}{3}$.

3. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.

4. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = -2$.

5. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = 4$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = 1$.

c) Lokális relatív függvényértékváltozás

α) Geometriai összefüggések

1. $\frac{\partial T}{\partial a} = \frac{1}{2} b \sin \gamma$; $\frac{\partial T}{\partial b} = \frac{1}{2} a \sin \gamma$; $\frac{\partial T}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} ab \cos \gamma$.

2. $\frac{\partial T}{\partial d_1} = \frac{1}{2} d_2 \sin \varphi$; $\frac{\partial T}{\partial d_2} = \frac{1}{2} d_1 \sin \varphi$; $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cos \varphi$.

3. $\frac{\partial T}{\partial R} = 2R\pi$; $\frac{\partial T}{\partial r} = -2r\pi$.

4. $\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{2}{3} h$; $\frac{\partial T}{\partial h} = \frac{2}{3} s$.

5. $\frac{\partial F}{\partial r} = \pi \sqrt{r^2 + h^2} + \frac{\pi r^2}{\sqrt{r^2 + h^2}}$; $\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\pi r h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$.

6. $\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{1}{3} \pi bc$; $\frac{\partial V}{\partial b} = \frac{1}{3} \pi ac$; $\frac{\partial V}{\partial c} = \frac{1}{3} \pi ab$.

β) Fizikai összefüggések

1. $\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{RT}{v^2}$; $\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v}$.

$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2}$; $\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p}$.

$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v}{R}$; $\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{p}{R}$.

2. $\frac{\partial N}{\partial P} = \frac{v}{75}$; $\frac{\partial N}{\partial v} = \frac{P}{75}$.

3. $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{2\pi}{60} n$; $\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{2\pi}{60} r$.

4. $\frac{\partial M}{\partial N} = \frac{716}{n}$; $\frac{\partial M}{\partial n} = -716 \frac{N}{n^2}$.

5. $\frac{\partial \eta}{\partial N_h} = \frac{1}{N_ö}$; $\frac{\partial \eta}{\partial N_ö} = -\frac{N_h}{N_ö^2}$.

6. $\frac{\partial \delta}{\partial v_1} = \frac{v_2}{v_k^2}$; $\frac{\partial \delta}{\partial v_2} = -\frac{v_1}{v_k^2}$.

7. $\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{c\varkappa}{v^{\varkappa+1}}; \quad \frac{\partial p}{\partial \varkappa} = -cv^{-\varkappa} \cdot \ln v.$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{c}{p^{\varkappa+1}}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}; \quad \frac{\partial v}{\partial \varkappa} = \left(\frac{c}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{\ln p - \ln c}{\varkappa^2}.$$

8. $\frac{\partial u}{\partial i} = r; \quad \frac{\partial u}{\partial r} = i.$

$$\frac{\partial i}{\partial u} = \frac{1}{r}; \quad \frac{\partial i}{\partial r} = -\frac{u}{r^2}.$$

9. $\frac{\partial w}{\partial i} = 2ir = 2u; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = i^2.$

10. $\frac{\partial r}{\partial l} = \frac{\varrho}{q}; \quad \frac{\partial r}{\partial q} = -\varrho\frac{l}{q^2}.$

11. $\frac{\partial H}{\partial i} = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{n}{l}; \quad \frac{\partial H}{\partial n} = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{i}{l}; \quad \frac{\partial H}{\partial l} = -\frac{4\pi}{10} \cdot \frac{ni}{l^2}.$

12. $\frac{\partial i_m}{\partial R_m} = -\frac{U}{(r_m + R_m)^2}.$

13. $\frac{\partial w}{\partial u} = i \cdot \cos\varphi; \quad \frac{\partial w}{\partial i} = u\cos\varphi; \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi} = -ui\sin\varphi.$

14. $\frac{\partial V_{vas}}{\partial G} = v_{10}\left(\frac{B}{10\,000}\right)^2; \quad \frac{\partial V_{vas}}{\partial B} = 2Gv_{10}\frac{B}{10\,000^2}.$

3. §. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY DIFFERENCIÁLJAI KÖZÉPÉRTÉKTÉTEL. DIFFERENCIÁLHATÓSÁG

a) Teljes differenciál

1. $dz = \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$

2. $dz = \left(\frac{1}{y\,\mathrm{tg}\frac{x}{y}} + \frac{\mathrm{tg}\frac{x}{y}}{y}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2\,\mathrm{tg}\frac{x}{y}} + \frac{x\,\mathrm{tg}\frac{x}{y}}{y^2}\right)dy.$

3. $dz = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$

4. $du = \frac{dx+dy+dz}{x+y+z}.$

5. $dz = yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy.$

6. $dz = 2xye^{x^2y}\,dx + x^2e^{x^2y}\,dy.$

7. $dz = (2xy - 2y - 1)\,dx + (x^2 - 2x - 2y)\,dy.$

8. $dz = [\cos(x+y) - \sin(x-y)]\,dx + [\cos(x+y) + \sin(x-y)]\,dy.$

9. $dz = [y\cos x - \sin(x-y)]\,dx + [\sin x + \sin(x-y)]\,dy.$

10. $du = yze^{xyz}\,dx + xze^{xyz}\,dy + xye^{xyz}\,dz.$

11. $dz = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \cos x \cdot \sin y\right]dx + \left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sin x \cdot \cos y\right]dy.$

12. $dz = (3x^2 - 6xy)\,dx + (3y^2 - 3x^2)\,dy.$

13. $du = \frac{2xy}{4-z^2}\,dx + \frac{x^2}{4-z^2}\,dy + \frac{2x^2yz}{(4-z^2)^2}\,dz.$

14. $du = (2xy - z^2 - yz)\,dx + (x^2 + z^2 - xz)\,dy + (2yz - 2xz - xy)\,dz.$

15. $du = \frac{1}{2(x-1)^{3/2}}\,dx + z\,dy + y\,dz.$

16. $du = \left(\frac{2x+y-x^2y}{1-2xy-x^2}\right)^2\left(\frac{2}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{1+y^2}\,dy\right).$

17. $dz = (a^x b^y \ln a + y \cos xy)\, dx + (a^x b^y \ln b + x \cos xy)\, dy.$

18. $dz = \frac{1}{1 + x^2} dx + \frac{1}{1 + y^2} dy.$

19. $du = \frac{z}{x\sqrt{x^2y^2 - z^2}} dx + \frac{z}{y\sqrt{x^2y^2 - z^2}} dy - \frac{1}{\sqrt{x^2y^2 - z^2}} dz.$

20. $dz = \left(\frac{y}{1 + x^2y^2} + \sin y + yx^{y-1}\right) dx + \left(\frac{x}{1 + x^2y^2} + x \cos y + x^y \ln x\right) dy.$

b) Érintősík

1. $z - \sqrt{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y - 1)$;

   $z + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(y - 1).$

2. $z - 1 = 3(x - 3) - 4(y - 2).$

3. $z = 1.$

4. $z + \frac{15}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 4(y - 2).$

5. $z - 12 = 6(x - 2) + 2(y - 6).$

c) Véges növekményekre vonatkozó közelítő egyenlőség

1. $\Delta T \approx \frac{\pi}{\sqrt{\frac{K}{Mgs}}} \cdot \Delta K - \frac{\pi}{M}\sqrt{\frac{K}{Mgs}} \cdot \Delta M;$

   $\Delta K = -K\, 0{,}002$; $\Delta M = -M\, 0{,}005.$ $\frac{\Delta T}{T} \approx 0{,}0025 - 0{,}001\, Mgs.$

2. $\Delta z \approx 0{,}06.$

3. $|\Delta f| \leqq 0{,}11.$

4. $|\Delta R| \leqq \frac{137}{1500} < \frac{1}{10}.$

5. $\frac{\partial \sin(x + y)}{\partial \sin x} = \frac{33}{52}$; $\frac{\partial \sin(x + y)}{\partial \sin y} = \frac{33}{60}.$

   $|\Delta \sin(x + y)| \leqq 1{,}2.$

6. $|\Delta \gamma| \leqq 0{,}0153.$

7. $\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \leqq 3\%.$ $\left|\frac{\Delta F}{F}\right| \leqq 2\%.$

4. §. IRÁNYMENTI DIFFERENCIÁLHÁNYADOS

1. $\dfrac{dz}{dl} = 0.$

2. $\dfrac{dz}{dl} = 32{,}77.$

3. $\dfrac{du}{ds} = 3{,}68.$

4. $\dfrac{dz}{dl} = 12{,}4.$

5. $\dfrac{dz}{dl} = 4{,}87.$

6. $\dfrac{du}{ds} = 9{,}15.$

7. $\dfrac{dz}{dl} = 0{,}91.$

8. $\dfrac{dz}{dl} = 0{,}883.$

9. $\dfrac{dz}{dl} = -1{,}18.$

10. $\dfrac{du}{ds} = 1{,}48.$

5. §. ÖSSZETETT FÜGGVÉNYEK, IMPLICIT FÜGGVÉNYEK

a) Összetett függvények parciális deriváltjai

1. $$\frac{\partial u}{\partial x} = (2v - 2e^{w})(2xy - 2y) - 2ve^{w} \cdot \cos(x + y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (2v - 2e^{w})(x^2 - 2x) - 2ve^{w} \cdot \cos(x + y).$$

2. $$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{v}{v^2 + w^2} \cdot \frac{1}{2(x - y^2)^{3/2}} + \frac{w}{v^2 + w^2} \cdot yze^{xyz};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{v^2 + w^2} \cdot \frac{y}{(x - y^2)^{3/2}} + \frac{w}{v^2 + w^2} \cdot xze^{xyz};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{w}{v^2 + w^2} \cdot xye^{xyz}.$$

3. $$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{w}{v + w}\right)^2 \cdot \frac{y}{1 + x^2y^2} + \left(\frac{v}{v + w}\right)^2 \cdot \sin y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{w}{v + w}\right)^2 \cdot \frac{x}{1 + x^2y^2} + \left(\frac{v}{v + w}\right)^2 \cdot x \cos y.$$

4. $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v^2 - 2vw - w^2}{(v - w)^2} \cdot yz \cos xyz + \frac{2vw - 3w^3 - v^2}{(v - w)^2} \cdot 2ax;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v^2 - 2vw - w^2}{(v - w)^2} \cdot xz \cos xyz + \frac{2vw - 3w^2 - v^2}{(v - w)^2} \cdot 2by;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{v^2 - 2vw - w^2}{(v - w)^2} \cdot xy \cos xyz + \frac{2vw - 3w^2 - v^2}{(v - w)^2} \cdot 2cz.$$

5. $$\frac{\partial u}{\partial x} = 2vwe^{v^2w} \cdot \frac{1}{x+y-z} + v^2e^{v^2w} \cdot yx^{y-1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2vw\, e^{v^2w}}{x+y-z} + v^2\, e^{v^2w} \cdot x^y \cdot \ln x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2vw\, e^{v^2w}}{x+y-z}.$$

b) Egyváltozós implicit függvények deriváltja

1. $y' = -\frac{9x}{4y}$.

2. $y' = \frac{3x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - 2xy - 3y^2}$.

3. $y' = \frac{2-3x}{2y}$.

4. $y' = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}$.

5. $y' = \frac{y}{x - y(x-y)^2}$.

6. $y' = -\frac{y^2 - 3(x+2)^2}{2y(x-2)}$.

7. $y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$.

8. $y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$.

9. $y' = -\frac{2\sin 2x}{3\sin 2y}$.

10. $y' = \frac{\cos y - y\cos x}{\sin x + x\sin y}$.

11. $y' = -\frac{\sin(x+y) + y}{\sin(x+y) + x}$.

12. $y' = -\frac{2 + 4ye^{xy}}{3 + 4xe^{xy}}$.

13. $y' = e^x\frac{\sin x - \cos x}{\sin y}$.

14. $y' = \frac{\sin y\cos y + y\cos x\sin^2 y}{x - \sin x\sin^2 y}$.

15. $y' = -\frac{ye^x + 2y^3}{e^x + 6xy^2}$.

16. $y' = \frac{2y^2 - (x^2+y^2)^2}{2xy}$.

17. $y' = -\frac{x^{x+y}\left(\ln x + \frac{x+y}{x}\right)}{e^y + x^{x+y}\cdot\ln x}$.

18. $y' = -\frac{ya^{xy}\ln a + \sin y}{xa^{xy}\cdot\ln a + x\cos y}$.

19. $y' = -\frac{e^y}{xe^y - 1}$.

20. $y' = -\frac{y\sqrt{x^2+y^2}\cdot\ln y + x}{x\sqrt{x^2+y^2} + y^2}$.

21. $y' = -\frac{x}{y}\cdot\frac{1 + \mathrm{tg}^2(x^2+y^2) + e^{x^2}}{2 + \mathrm{tg}^2(x^2+y^2)}$.

22. $y' = -\frac{yx^{y-1} - y^x\cdot\ln y}{x^y\cdot\ln x - xy^{x-1}}$.

23. $y' = \frac{x^3 + x^2y + y^3}{2x^3 + xy^2}$.

24. $y' = \frac{a^{x-y}\cdot\ln a - yx^{y-1}}{a^{x-y}\cdot\ln a + x^y\cdot\ln x}$.

c) **Kétváltozós implicit függvények parciális deriváltjai**

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{1-z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{1-z}.$

2. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2}{1-z^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^2}{1-z^2}.$

3. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos y - z \sin x}{y \sin z - \cos x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos z - x \sin y}{y \sin z - \cos x}.$

4. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+z}{x+y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y}.$

5. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{\sin z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y}{\sin z}.$

6. §. PARAMÉTERES FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLÁSA

1. $18\left(x - \frac{7}{2}\right) + 6\sqrt{3}\left(y - \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2\right) - \left(3\sqrt{3} + \frac{27}{2}\right)(z - 4) = 0.$

2. $10(x - 3) + z - 15 = 0.$

3. $\left(\frac{5\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{12}}{2}\right)\left(x - \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} + 1\right)\left(y - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) +$

$+ (5\sqrt{2} + 2)(z - \sqrt{2}) = 0.$

4. $2\left(x - \frac{15\sqrt{3}}{16}\right) + 2\sqrt{3}\left(y - \frac{45}{16}\right) - \sqrt{3}\left(z - \frac{5}{8}\right) = 0.$

5. $4x + 5y - z = 4.$

7. §. MAGASABBRENDŰ PARCIÁLIS DERIVÁLTAK

a) 1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -e^x \sin y - e^y \cos x = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$

2. $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{\sin x}{y} + \frac{\sin y}{x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}.$

3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + y x^{y-1} \ln x = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$

4. $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 6x^2 - 36y^2 + 48xy.$

5. $d^2 z = (y^2 e^{xy} + y e^x)\, dx^2 + 2(e^{xy} + xy e^{xy} + y e^x + e^y)\, dx\, dy +$

$+ (x^2 e^{xy} + x e^y)\, dy^2.$

6. $d^3z = -2ye^x\,dx^3 - 6e^x\,dx^2\,dy - \frac{6}{y^2}dx\,dy^2 + \frac{4x}{y^3}\,dy^3.$

7. $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 12\,; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = -10\,; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = 6.$

8. §. FELÜLETI PONTOK OSZTÁLYOZÁSA. SZÉLSŐÉRTÉKEK

a) 1. Minimum, ha $x = 5$, $y = -4$.

2. Maximum, ha $x = 1$, $y = \frac{2}{3}$.

3. Minimum, ha $x = \sqrt{2}$ és $y = -\sqrt{2}$, vagy $x = -\sqrt{2}$ és $y = \sqrt{2}$.

4. Minimum, ha $x = -\frac{4}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.

5. Minimum, ha $x = y = 3$.

6. Maximum, ha $x = 0$, $y = \pm 1$.

7. Maximum, ha $x = y = \frac{4}{3}$.

8. Maximum, ha $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$.

9. Maximum, ha $x = y = \frac{\pi}{3}$.

10. Minimum, ha $x = -\frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = -1$.

b) 1. Minimum, ha $x = -2$, $y = 0$; maximum, ha $x = \frac{16}{7}$, $y = 0$.

2. Minimum, ha $x = \frac{-1-\sqrt{6}}{3}$, $y = \frac{2}{3}$;

maximum, ha $x = \frac{-1+\sqrt{6}}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.

3. Maximum, ha $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$;

minimum ugyanott. (Előbbi esetben $z > 0$, utóbbi esetben $z < 0$).

4. Maximum, ha $x = y = 1$;

minimum, ha $x = y = -1$.

5. Az $x = 1$, $y = 2$ helyen nincs szélsőérték.

c) 1. Maximum, ha $x = y = -2\sqrt{2}$;

minimum, ha $x = y = 2\sqrt{2}$.

2. Minimum, ha $x = y = 3$.

3. Maximum, ha $x = y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$;

minimum, ha $x = -y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Maximum, ha $x = y = z = 1$, vagy $x = -y = -z = 1$,

vagy $-x = -y = z = 1$, vagy $-x = y = -z = 1$.

Minimum, ha $x = y = z = -1$, vagy $x = -y = -z = -1$,

vagy $-x = -y = z = -1$, vagy $-x = y = -z = -1$.

5. $u_{max} = \left(\frac{2}{9}\right)^9$.

6. $u_{max} = 3$, ha $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $y = 0$, $z = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

$u_{min} = -2$, ha $x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $y = 0$, $z = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

7. $u_{max} = 6$, ha $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vagy $x = z = 0$ és $y = 1$.

$u_{min} = -2$, ha $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

8. $u_{max} = 9$, ha $x = 0$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$u_{min} = 1$, ha $x = 1$, $y = z = 0$, vagy $x = 0$, $y = z = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

9. $u_{max} = 9$, ha $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $y = 0$, $z = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

$u_{min} = -9$, ha $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = \frac{2}{3}$.

d) 1. Minimum, ha $a = 2$, $b = 2$, $m = 1$.

2. Minimum, ha $r = 1{,}55$ dm, $m_{henger} = 0{,}86$ dm és $m_{kúp} = 1{,}4$ dm.

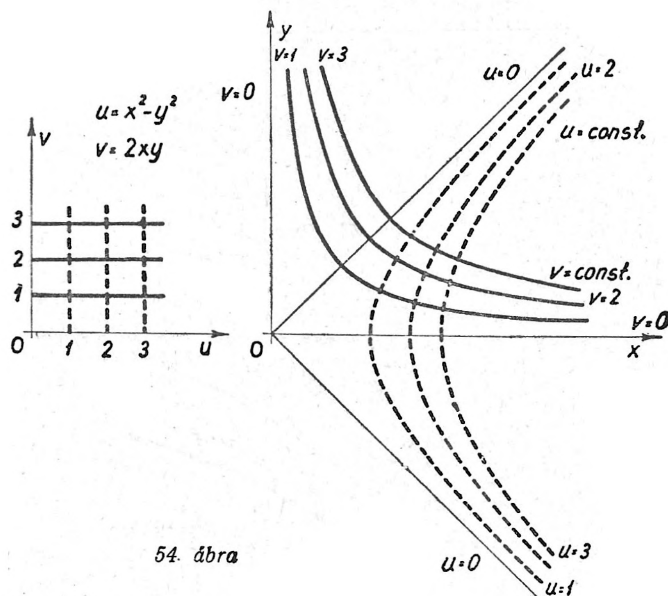
3. Mindegyik szög kiigazítása egyenlő: $\frac{h}{n}$.

4. Maximum az $x = \pm a$ helyen.

5. $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

9. §. FÜGGVÉNYRENDSZEREK, TRANSZFORMÁCIÓK (LEKÉPEZÉSEK)

1. $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 4x^2 + 4y^2$. (L. 54. ábra.)



54. ábra

2. $\frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}$. (L. 55. ábra.)

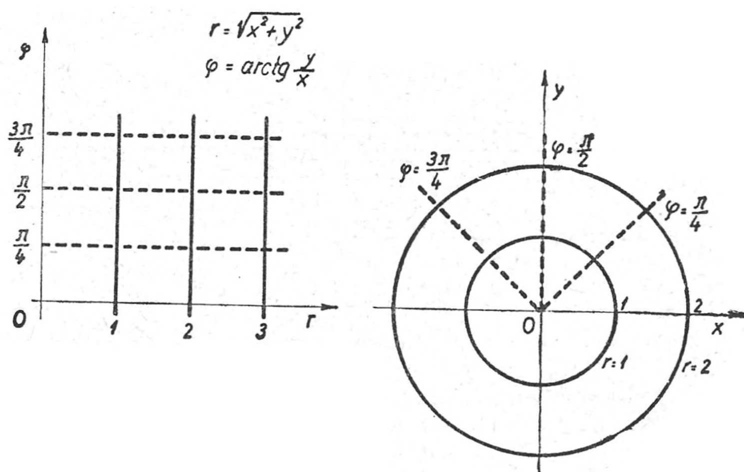
$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. (L. 56. ábra.)

10. §. SÍKGÖRBÉK SZINGULÁRIS PONTJAI

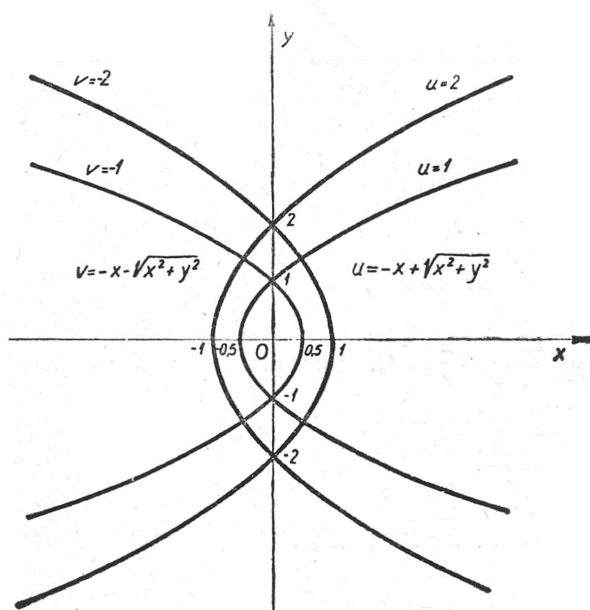
1. Izolált pont.
2. Izolált pont.
3. Csomópont.
4. Csomópont.

11. §. GÖRBESEREG BURKOLÓJA

1. $y = \pm x$.
2. Ciklois.
3. $x^2 + 2y^2 = 2r^2$.
4. Ciklois.
5. Kardioid.



55. ábra



56. ábra

Felhasznált és ajánlott irodalom

1. *N. M. Gjunter—R. O. Kuzmin:* Felsőbb matematikai példatár. I. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.)

2. *A. F. Bermant:* Matematikai analízis. II. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.)

3. *M. K. Grebencsa—Sz. I. Novoszjolov:* Matematikai analízis II. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.)

4. *D. Leib:* Applications du calcul différentiel et intégral. (Paris, A. Blanchard, 1930.)

5. *R. Rothe:* Höhere Mathematik. I., IV. 1/2. (Teubner, Leipzig, 1948.)

6. *Szász Pál:* A differenciál- és integrálszámítás elemei. I. (Közoktatásügyi Kiadó, Budapest, 1951, 2. kiadás).

7. *Stachó Tibor:* Felsőbb mennyiségtan. (Budapest, 1944, 2. kiadás.)

8. *Rados G.:* Analízis és geometria II. évfolyam. (Franklin, Budapest, 1920.)

9. *A. Ostrowski:* Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. II. Birkhäuser, Basel, 1951.)

10. *H. Mangoldt—K. Knopp:* Einführung in die höhere Mathematik. II. (S. Hirzel, Leipzig, 1932.)

Tankönyvkiadó Vállalat
A kiadásért felelős: dr. Vágvölgyi Tibor igazgató
Felelős szerkesztő: Ambrus Ferenc
Műszaki vezető: Hámori József
Műszaki szerkesztő: Hülber Péter
A kézirat nyomdába érkezett: 1972. augusztus. Megjelent: 1973. január
Példányszám: 2000. Terjedelem: 8,75 (A/5) ív, 56 ábra
Készült: az 1953. évi első kiadás matricájáról, az 1967. évi harmadik kiadás alapján
az MSZ 5601–59 és az MSZ 5602–55 szabvány szerint
Raktári szám: 44 131/VI.
72.8220 Egyetemi Nyomda, Budapest. Felelős vezető: Janka Gyula igazgató